Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a 11-a

Enunţuri şi bareme

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât

$$\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \det\left(A^2 - A + I_2\right) = 3.$$

Demonstraţi că

$$A^2\left(A^2 + I_2\right) = 2I_2.$$

Supliment Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{C}$, $\alpha = Tr(A)$ şi $\beta = \det(A)$. Atunci $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = O_2$, de unde $A^2 + A + I_2 = (1+\alpha)A + (1-\beta)I_2$. Din $\det(A^2 + A + I_2) = 3$ reiese $\begin{vmatrix} (1+\alpha)x + 1 - \beta & (1+\alpha)y \\ (1+\alpha)z & (1+\alpha)t + 1 - \beta \end{vmatrix} = 3$. Din $x + t = \alpha$ şi $xt - yz = \beta$, obţinem ecuaţia $(\alpha+1)(\alpha+\beta) + (1-\beta)^2 = 3$. Analog obţinem şi $(\alpha-1)(\alpha-\beta) + (1-\beta)^2 = 3$ **3p**

Deducem că $\alpha + \alpha\beta = 0$. **1p**

Dacă $\alpha = 0$, atunci obţinem $\beta = 2$ sau $\beta = -1$. Dacă $\beta = -1$ obţinem $\alpha = 0$ **2p**

Avem $A^2 - I_2 = O_2$ sau $A^2 + 2I_2 = O_2$ şi de aici concluzia **1p**

Problema 2. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ şi $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $AC + kBD = I_n$ şi $AD = BC$. Demonstraţi că $CA + kDB = I_n$ şi $DA = CB$.

Soluţie. Pentru început considerăm $k \neq 0$. Fie $w \in \mathbb{C}$ astfel încât $w^2 = -k$. Considerăm matricele $X = A + wB$, $Y = C - wD$, $Z = A - wB$ şi $U = C + wD$. Ipoteza conduce la $XY = I_n$ şi $ZU = I_n$ **3p**

Atunci $YX = I_n$ şi $UZ = I_n$ **1p**

Deducem $(CA + kDB) - w(DA - CB) = I_n$ şi $(CA + kDB) + w(DA - CB) = I_n$, de unde se obţine concluzia **2p**

Pentru $k = 0$ rezultă $AC = I_n$, de unde $CA = I_n$. Din $AD = BC$ şi $CA = I_n$ deducem că $ADA = B$ şi apoi $DA = CB$ **1p**

Problema 3. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq f(x) + \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \in \mathbb{Z}^*.$$

Soluţie: Prin inducţie se demonstrează că $f(x+r) \leq f(x)+r$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $r \in \mathbb{Q}$ **2p**

Continuitatea funcţiei f şi densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ conduc la $f(x+y) \leq f(x)+y$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R}$ **3p**

Se obţin funcţiile $f_a(x) = x + a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $a \in \mathbb{R}$ **1p**

Se verifică faptul că aceste funcţii corespund ipotezei **1p**

Problema 4. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care au proprietatea

$$\frac{f(x)-g(y)}{x-y} + |x-y| \geq 0, \text{ oricare ar fi } x, y \in I, x \neq y.$$

i) Demonstraţi că f şi g sunt funcţii crescătoare.

ii) Daţi exemplu de funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \neq g$ care verifică relaţia din ipoteză.

Soluţie. i) Din ipoteză rezultă $f(x) + (x-z)^2 \geq g(z) \geq f(y) - (z-y)^2$, oricare ar fi $x > z > y$, $x, y, z \in I$; în particular, $f(x) + (x-y)^2 \geq f(y)$, oricare ar fi $x > y$, $x, y \in I$ **1p**

Pentru $a, b \in I$, $a > b$, luând $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_k = a - \frac{k}{n}(a-b), k \in \overline{0,n}$ obţinem $f(x_k) + (x_k - x_{k+1})^2 \geq f(x_{k+1})$, $k = \overline{0, n-1}$, iar prin adunare $f(a) + \frac{1}{n}(a-b)^2 \geq f(b)$. Cum această inegalitate este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, obţinem prin trecere la limită $f(a) \geq f(b)$ **3p**

Analog, g este crescătoare **1p**

ii) Un exemplu cu $I = \mathbb{R}$ este $f(x) = 0$ pentru $x < 0$, $f(x) = 1$ pentru $x \geq 0$ şi $g(x) = 0$ pentru $x \leq 0$, $g(x) = 1$ pentru $x > 0$ **2p**