**Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"**
**profil real-ştiinţe ale naturii, servicii, tehnologic**
**Faza locală - 15 februarie 2018**

**Clasa a X-a**

1. a) Determinați numerele raționale $a,b$ pentru care $\dfrac{3+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}$.

b) Se consideră expresia $E_n=\left(\sqrt[3]{5}\right)^{2019-n}\left(\sqrt{2}\right)^n$, $n=\overline{1,2019}$. Determinați câte numere raționale sunt în mulțimea $E=\{E_1,E_2,...,E_{2019}\}$.

2. a) Fie $a,b\in(0,+\infty)$. Demonstrați că, dacă $\dfrac{\lg a+\lg b}{2}=\lg\dfrac{a+b}{3}$, atunci $a^2+b^2=7ab$.

b) Fie $a,b,c\in(0,\infty)$. Demonstrați că $\left(\dfrac{a^2}{bc}\right)^{\lg\frac{b}{c}}\cdot\left(\dfrac{b^2}{ac}\right)^{\lg\frac{c}{a}}\cdot\left(\dfrac{c^2}{ba}\right)^{\lg\frac{a}{b}}=1$.

3. Fie $z_k\in\mathbb{C}$ cu $|z_k|=1,\ k=\overline{1,3}$. Arătați că $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=1,\ \textit{pentru}\ z_1+z_2+z_3\neq 0.$.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to B$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$. Să se determine mulţimea $B$ astfel încât funcția să fie surjectivă.

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

# Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
## profil real-ştiinţe ale naturii, servicii, tehnologic
## Faza locală - 15 februarie 2018

**Clasa a X-a - barem de corectare**

| | | |
|---|---|---|
| 1.a) | Calcul direct: $\frac{3+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(7+\sqrt{5})}{44}=\frac{26+10\sqrt{5}}{44}=\frac{13}{22}+\frac{5}{22}\sqrt{5}$<br>Identificare $a=\frac{13}{22},\ b=\frac{5}{22}$ | 2p<br>1p |
| 1.b) | $E_n=\left(\sqrt[3]{5}\right)^{2019-n}\left(\sqrt{2}\right)^n=5^{\frac{2019-n}{3}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}=5^{673-\frac{n}{3}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}$<br>$\frac{n}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=3p,\ p\in\mathbb{Z}$<br>$E_n\in\mathbb{Q}$ dacă $\frac{n}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=3q, q\in\mathbb{Z}$ , de unde $\begin{cases}n=6k,\ k\in\mathbb{Z}\\1\le n\le 2019\end{cases}$.<br>$1\le n\le 2019$<br>Se obțin 336 numere rationale în mulțime. | 1p<br>2p<br>1p |
| 2.a) | Dacă $\frac{\lg a+\lg b}{2}=\lg\frac{a+b}{3}\Rightarrow \lg(ab)^{\frac{1}{2}}=\lg\frac{a+b}{3}\Rightarrow (ab)^{\frac{1}{2}}=\frac{a+b}{3}$, adică<br>$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{3}\Rightarrow\sqrt{9ab}=a+b\Rightarrow a^2+b^2+2ab=9ab\Leftrightarrow a^2+b^2=7ab$. | 2p<br>1p |
| 2.b) | Se logaritmează egalitatea dată $\lg\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\lg\frac{b}{c}}+\lg\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\lg\frac{c}{a}}+\lg\left(\frac{c^2}{ba}\right)^{\lg\frac{a}{b}}=0$<br>Calcule și se obține $0=0$. | 2p<br>2p |
| 3. | Din $\lvert z_k\rvert=1, k=\overline{1,3}$ se obține $z_k\overline{z_k}=1, k=\overline{1,3}$<br>Fie $Z=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}$. Atunci<br>$Z\cdot\overline{Z}=\left\lvert\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right\rvert^2=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\frac{\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+\overline{z_3}\,\overline{z_1}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}=$<br>$\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\frac{\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\cdot\frac{z_1+z_2+z}{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}=1$<br>Deci, $Z\cdot\overline{Z}=\lvert Z\rvert^2=1\Rightarrow\lvert Z\rvert=1$. | 2p<br>2p<br>2p<br>1p |
| 4. | Funcția este surjectivă dacă $\operatorname{Im} f=f(\mathbb{R})=B$<br>Din, $y=f(x)$ se obține $(y-1)x^2+yx+y-1=0$<br>Trebuie $\Delta\ge 0$<br>$\Delta=-3y^2+8y-4$<br>Din $-3y^2+8y-4\ge 0\Rightarrow B=\left[\frac{2}{3},2\right]$. | 2p<br>1p<br>1p<br>1p<br>2p |

**NOTĂ:** Orice soluție corectă se punctează corespunzător.