Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil real-ştiinţe ale naturii, servicii , tehnologic
Faza Zonală - 15 februarie 2018

Clasa a XII-a

1. Fie grupurile $G_1=\left((0,\infty),\cdot\right)$ și $G_2=\left((-2,2),\circ\right)$, unde $x\circ y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$, $x,y\in(-2,2)$

a) Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to(-2,2)$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$ este izomorfism între grupurile G_1 și G_2.

b) Rezolvați ecuația $\underbrace{y\circ y\circ\ldots\circ y}_{2018\ ori}=1$.

2. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea

$G=\left\{X(a)\,\middle|\,X(a)=I_2+aA,\ \ a>-1\right\}$.

a) Arătați că G este parte stabilă în $M_2(\mathbb{R})$ față de înmulțirea matricelor.

b) Calculați $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)$.

3. a) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}axe^x-x, & x\le 0\\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$

este o primitivă a unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

b) Calculați integralele nedefinite:

$$I_1=\int\frac{e^x-\cos x}{e^x-\sin x-\cos x}dx \text{ și } I_2=\int\frac{\sin x}{e^x-\sin x-\cos x}dx,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Demonstrați că: $2\sqrt{e}\le\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx\le 1+e$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil real-ştiinţe ale naturii , servicii , tehnologic
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a XII-a - barem de corectare

1.a)	Bijectivitatea funcției $f:(0,\infty)\to(-2,2),\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$	2p
	$f(x)\circ f(y)=\dfrac{2x-2}{x+1}\circ\dfrac{2y-2}{y+1}=\dfrac{4\left(\dfrac{2x-2}{x+1}+\dfrac{2y-2}{y+1}\right)}{4+\dfrac{2x-2}{x+1}\dfrac{2y-2}{y+1}}=\dfrac{2xy-2}{xy+1}=f(x\cdot y),\ \forall x,y\in(0,\infty)$	2p
1.b)	Fie $x\in(0,\infty)$ astfel încât $y=f(x)$. Atunci $\underbrace{y\circ y\circ\ldots\circ y}_{2018\,ori}=1\Leftrightarrow\underbrace{f(x)\circ f(x)\circ\ldots\circ f(x)}_{2018\,ori}=1$	1p
	Din $\underbrace{f(x)\circ f(x)\circ\ldots\circ f(x)}_{2018\,ori}=f(\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{2018\,ori})=f(x^{2018})$ și $\underbrace{f(x)\circ f(x)\circ\ldots\circ f(x)}_{2018\,ori}=f(2018)$ se obține $f(x^{2018})=f(2018)\Leftrightarrow x=\sqrt[2018]{2018}$	1p
	Se obține $y=f(x^{2018})$	1p
2.a)	Se arată că $\forall X(a),\ X(b)\in G\Rightarrow X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)\in G$	2p
2.b)	Din a) avem $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)=X((a+1)(b+1)-1)$	2p
	$X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)=X(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n-1)=X(n!-1)$	2p
	Inducție matematică pentru $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)=X(n!-1)$	1p
3.a)	Din continuitatea în $x=0,\ l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow b=0$.	2p
	Din derivabilitatea în $x=0,\ f'(0)=f_s'(0)=f_d'(0)\Rightarrow a=2$.	2p
3.b)	Calculul $I_1-I_2=\int dx=x+C$	1p
	Calculul $I_1+I_2=\ln\left\|e^x-\sin x-\cos x\right\|+C$	1p
	Se obține $I_1=\dfrac{1}{2}\left(x+\ln\left\|e^x-\sin x-\cos x\right\|\right)+C$ și $I_2=\dfrac{1}{2}\left(\ln\left\|e^x-\sin x-\cos x\right\|-x\right)+C$.	1p
4.	Se alege $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$. Avem $f'(x)=2x(e^{x^2}-e^{1-x^2})$	2p
	Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x=0$, care este punct de maxim (din tabelul de monotonie) și $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, care este punct de minim (din tabelul de monotonie)	2p
	Deci, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 2\sqrt{e}\le f(x)\le 1+e,\ \forall x\in[0,1]$.	2p
	Integrând rezultă $2\sqrt{e}\le\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx\le 1+e$.	1p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.