

**Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”  
profil real-științe ale naturii , servicii, tehnologic  
Faza locală - 15 februarie 2018**

**Clasa a XI-a**

1. Se consideră punctele  $A_n(n^2, n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a) Arătați că pentru orice  $p, q, r \in \mathbb{N}^*$  distincte două câte două, punctele  $A_p, A_q, A_r$  nu sunt coliniare.
  - b) Demonstrați că aria triunghiului  $A_n A_{n+1} A_{n+2}$  este constantă.
2. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1+3x & 18x \\ -x & 1-6x \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ .
  - a) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y-3xy)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ .
  - b) Calculați  $A(1)^{2018}$ .
3. a) Calculați limita:  $l = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin(x^2-1)}{x^2+3x+2}$ .  
b) Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+ax}{\sqrt{x^2+a}}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , unde  $D$  este domeniul maxim de definiție. Determinați numărul real  $a$ , astfel încât dreapta de ecuație  $y = -x+1$  să fie asimptotă oblică la  $-\infty$  a funcției. Determinați toate asimptotele funcției.
4. Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x+5} - ax - b) = 1$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”**  
**profil real- științe ale naturii , servicii , tehnologic**  
**Faza locală - 15 februarie 2018**

**Clasa a XI-a - barem de corectare**

1.a)	<p>Calculează determinantul <math>\Delta = \begin{vmatrix} p^2 &amp; p+2 &amp; 1 \\ q^2 &amp; q+2 &amp; 1 \\ r^2 &amp; r+2 &amp; 1 \end{vmatrix} = (r-q)(r-p)(q-p) \neq 0</math></p> <p>Deci, <math>A_p, A_q, A_r</math> nu sunt coliniare.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
1.b)	<p>Scrie punctele: <math>A_n(n^2, n+2)</math>, <math>A_{n+1}((n+1)^2, n+3)</math>, <math>A_{n+2}((n+2)^2, n+4)</math></p> <p>Aria triunghiului este <math>A = \frac{1}{2} D </math>, unde <math>D = \begin{vmatrix} n^2 &amp; n+2 &amp; 1 \\ (n+1)^2 &amp; n+3 &amp; 1 \\ (n+2)^2 &amp; n+4 &amp; 1 \end{vmatrix}</math>.</p> <p>Calculează <math>D = -2 \Rightarrow A = 1 = \text{const.}</math></p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2.a)	<p>Calcul <math>A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1+3(x+y-3xy) &amp; 18(x+y-3xy) \\ -(x+y-3xy) &amp; 1-6(x+y-3xy) \end{pmatrix} =</math></p> <p><math>\begin{pmatrix} 1+3(x+y-3xy) &amp; 18(x+y-3xy) \\ -(x+y-3xy) &amp; 1-6(x+y-3xy) \end{pmatrix} = A(x+y-3xy).</math></p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
2.b)	<p>Calcul <math>A(x) \cdot A(y) = A(x+y-3xy) = A\left(\frac{1}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right)\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}</math></p> <p><math>A(x)^2 = A\left(\frac{1}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right)</math></p> <p>Inducție matematică pentru <math>A(x)^n = A\left(\frac{1}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^n\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2</math></p> <p>Atunci <math>A(1)^{2018} = A\left(\frac{1}{3} - 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2018}\right) = A\left(\frac{1}{3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2018}\right).</math></p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
3.a)	<p><math>l = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin(x^2-1)}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin(x^2-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin(x^2-1)}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+2} = -2.</math></p>	2p
3.b)	<p><math>m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+ax}{x\sqrt{x^2+a}} = -1, \forall a \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)+x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+ax}{\sqrt{x^2+a}} + x\right) = 1 \Leftrightarrow a = -1</math></p> <p>Pentru <math>a = -1 \Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)</math></p> <p>Se obțin <math>x = -1</math> asimptotă verticală și <math>y = x - 1</math> asimptotă oblică spre <math>+\infty</math>.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
4.	<p>Se obține <math>a = 1</math></p> <p><math>b = 0;</math></p>	<p>4p</p> <p>3p</p>

**NOTĂ:** Orice soluție corectă se punctează corespunzător.