Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil real-ştiinţe ale naturii, tehnologic, servicii
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a IX-a

1. a) Aflați valorile reale x care verifică egalitatea $\left||x+20|-18\right|=2018$.

   b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|8x-7y-15|\leq 2000$ și $|8y-9x-1|\leq 2$.
   Demonstrați că $-2018\leq x-y\leq 1986$.

2. a) Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ astfel încât $ab+bc+ca=7$. Arătați că $\sqrt{ab+bc}+\sqrt{2bc+2ca}+\sqrt{3ca+3ab}\leq 10$.

   b) Demonstrați inegalitatea $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 4}+...+\sqrt{(2n-1)\cdot 2n}<\dfrac{2n^2+n}{2}, \quad n\in\mathbb{N}^*$.

3. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu R mijlocul lui $[AD]$, S mijlocul lui $[BC]$, M mijlocul lui $[AC]$ și cu N mijlocul lui $[BM]$.

   a) Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{RS}$.

   b) Demonstrați că pentru orice punct P din plan este adevărată egalitatea $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PN}$.

4. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex și G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, DEF, respectiv EFA. Arătați că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil real - ştiinţe ale naturii, tehnologic, servicii
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a IX-a - barem de corectare

1. a)	Din $\left\|\|x+20\|-18\right\|=2018$ avem $\|x+20\|-18=-2018$ sau $\|x+20\|-18=2018$. Ecuația $\|x+20\|-18=-2018$ nu are soluții. Ecuația $\|x+20\|-18=2018 \Leftrightarrow \|x+20\|=2036$ are soluțiile $x_1=-2056$ și $x_2=2016$	1p 1p 2p
1.b)	$\|8x-7y-15\|\le 2000 \Leftrightarrow -2000\le 8x-7y-15\le 2000 \Leftrightarrow -1985\le 8x-7y\le 2015$ $\|8y-9x-1\|\le 2 \Leftrightarrow -2\le 8y-9x-1\le 2 \Leftrightarrow -1\le 8y-9x\le 3$ De unde, prin adunarea inegalităților, $-1986\le y-x\le 2018 \Leftrightarrow -2018\le x-y\le 1986$	1p 1p 1p
2.a)	Din egalitatea mediilor, $\sqrt{ab+bc}=\sqrt{(ab+bc)\cdot 1}\le \frac{ab+bc+1}{2}$, $\sqrt{2bc+2ca}=\sqrt{(bc+ca)\cdot 2}\le \frac{bc+ca+2}{2}$ și $\sqrt{ca+ab}=\sqrt{(ca+ab)\cdot 3}\le \frac{ca+ab+3}{2}$. Însumând cele trei relaţii se obţine $\sqrt{ab+bc}+\sqrt{bc+ca}+\sqrt{ca+ab}\le \frac{ab+bc+1}{2}+\frac{bc+ca+2}{2}+\frac{ca+ab+3}{2}=ab+bc+ca+3=10$	2p 2p
2.b)	Inducție matematică: $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 4}+...+\sqrt{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{2n^2+n}{2}, \quad n\in\mathbb{N}^*$ Pentru $n=1\Rightarrow \sqrt{1\cdot 2}<\frac{3}{2}$ adevărată. Pp. $p(k)$: $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 4}+...+\sqrt{(2k-1)\cdot 2k}<\frac{2k^2+k}{2}$ adevărată $p(k)+\sqrt{(2k+1)(2k+2)}\Rightarrow$ $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 4}+...+\sqrt{(2k-1)\cdot 2k}+\sqrt{(2k+1)(2k+2)}<\frac{2k^2+k}{2}+\sqrt{(2k+1)(2k+2)}$ adevărată Se demonstrează că $\frac{2k^2+k}{2}+\sqrt{(2k+1)(2k+2)}<\frac{2(k+1)^2+k+1}{2}$.	1p 1p 1p
3.a)	Avem $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}$ și $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CS}$ Se adună cele două egalități și rezultă $2\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.	2p 1p
3.b)	Din $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PB})$ și $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})$ se obține $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PC}$,de unde $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PN}$	2p 2p
4.	Pentru un punct oarecare din plan notat cu O : $3\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $3\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $3\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$, $3\overrightarrow{OG_4}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}$ Se obține $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}$, de unde $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.	4p 2p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător**.**