Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a IX-a

1. a) Aflați numărul valorilor întregi x care verifică inegalitatea $|x+18| \le 2018$.

   b) Să se arate că dacă $|x| \le 2$, $|y-1| \le 3$ și $|x-z| \le 12$, atunci $|xy-z| \le 18$.

2. a) Fie $a,b,c \in (0,\infty)$ astfel încât $a+b+c=12$. Demonstrați că $\sqrt{2a+2}+\sqrt{2b+3}+\sqrt{2c+4} \le 18$.

   b) Demonstrați egalitatea $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2+1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+3)}{2(2n+1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Doi călători au de parcurs un traseu lung de 63 *km*. Primul călător parcurge în prima zi 3 *km*, iar apoi parcurge în fiecare zi cu un kilometru mai mult decât în ziua precedentă. Al doilea călător parcurge în prima zi 1 *km* , iar, apoi, în fiecare zi parcurge dublul distanței parcurse în ziua precedentă.

   a) Determinați numărul de zile necesar fiecărui călător pentru a parcurge traseul.

   b) Dacă cei doi călători pornesc în aceeași zi, la sfârșitul cărei zile va fi depășit primul călător de către cel de-al doilea?

4. În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră punctele $A(-2,1)$, $B(0,2)$ și $C(3,3)$. Să se afle:

   a) Coordonatele punctului $D \in Ox$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ să fie coliniari.

   b) Coordonatele punctului E pentru care centrul de greutate al triunghiului *ABE* este punctul $G(2,1)$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil uman
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a IX-a - barem de corectare

1. a)	$\lvert x+18\rvert \le 2018 \Leftrightarrow -2018 \le x+18 \le 2018 \Leftrightarrow -2036 \le x \le 2000$ $x \in [-2036, 2000] \cap \mathbb{Z} = \{-2036, -2035, ..., 0, 1, ..., 2000\}$ 4037 elemente.	2p 1p 1p
1.b)	$\lvert xy-z\rvert = \lvert xy-x+x-z\rvert \le \lvert xy-x\rvert + \lvert x-z\rvert$ $= \lvert x\rvert \lvert y-1\rvert + \lvert x-z\rvert \le 2\cdot 3+12=18$	1p 2p
2.a)	Folosește inegalitatea mediilor, $\sqrt{2a+2}+\sqrt{2b+3}+\sqrt{2c+4}=\sqrt{(2a+2)\cdot 1}+\sqrt{(2b+3)\cdot 1}+\sqrt{(2c+4)\cdot 1}\le$ $\le \frac{2a+2+1}{2}+\frac{2b+3+1}{2}+\frac{2c+4+1}{2}=\frac{2(a+b+c)+12}{2}=18.$	2p 1p
2.b)	Pentru $n=1$ se obţine $P(1): \frac{2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, adevărată. Pp $P(k): \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2+1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+3)}{2(2k+1)}$ adevărată. $P(k)\to P(k+1)$ $P(k+1): \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2+1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{2(2k+3)}$. Arată prin calcul $\frac{k(k+3)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{2(2k+3)}$.	1p 2p 1p
3.a)	Primul călător: $3+4+5+...+n=63$, de unde $n=11$; primul călător parcurge traseul în 9 zile Al doilea călător: $1+2+2^2+...+2^n=63 \Leftrightarrow 2^{n+1}-1=63$, de unde $n=5$; al doilea călător parcurge traseul în 6 zile.	2p 3p
3.b)	După 5 zile primul călător a parcurs 25 km, iar al doilea 31 km.	2p
4.a)	Fie $D\in Ox$ adică $D(x,0)$. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $k\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$. Rezultă $2\vec{i}+\vec{j}=(x-3)\vec{i}-3\vec{j}$. De aici se obţine $\frac{x-3}{2}=-3 \Rightarrow x=-3$ Deci, $D(-3,0)$.	2p 1p 1p
4.b)	Din $x_G=\frac{x_A+x_B+x_E}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_E}{3}$ se obține $x_E-2=6 \Rightarrow x_E=8$ și $y_E+3=3 \Rightarrow y_E=0$.	1p 2p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.