Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a XII-a

1. Fie mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 4a \\ -a & 1-2a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$.
   a) Arătați că $\forall A(a), A(b) \in G$, atunci $A(a) \cdot A(b) \in G,\ a, b \in \mathbb{R}$.
   b) Calculați $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(2016)$.

2. a) Determinați $a, b \in \mathbb{C}$ pentru care $A^3 = aA^2 + bA$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că ${}^t(AB) = BA$.

   c) Determinați $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 + a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + bI_2 = O_2$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții

   $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$.

   a) Arătați că $\Delta_1 = \Delta_2$.
   b) Demonstrați că pentru orice puncte distincte $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)),\quad a, b, c \in \mathbb{N}$ aria triunghiului *ABC* este un număr natural divizibil cu 3.

4. a) Rezolvați ecuația: $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ 3 & x & 5 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$.

   b) Verificați egalitatea $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = -2(a^3 + b^3)$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a XII-a - barem de corectare

1.a)	$\forall A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a)\cdot A(b) \in G,\ a,b \in \mathbb{R}$: $A(a)\cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1+2a+2b & 4a+4b \\ -a-b & 1-2a-2b \end{pmatrix} = A(a+b) \in G,\ a,b\in\mathbb{R}$	4p
1.b)	$A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(2018) = A(1+2+\ldots+2018) = A(1009\cdot 2019)$	3p
2.a)	Calcul $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se obține sistemul de ecuații $\begin{cases} 2a+b=4 \\ a+b=1 \end{cases}$ Cu soluția $a=3,\ b=-2$.	1p 1p 1p
2.b)	Se calculează ${}^t(AB) = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p
2.c)	Din $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 + a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + bI_2 = O_2$ se obține sistemul de ecuații $\begin{cases} a+b=-5 \\ a+2=0 \end{cases} \Rightarrow a=-2,\ b=-3$.	2p
3.a)	Calcul $\Delta_1 = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3+2a+3 & b^3+2b+3 & c^3+2c+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & c2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \Delta_1$	2p 2p (4p)
3.b.)	Aria triunghiului este $A = \frac{1}{2}\lvert\Delta_2\rvert$ $\Delta_2 = \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3-a & b^3-b & c^3-c \end{vmatrix}$ Se fosloseşte că $6 \mid k^3-k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$	1p 1p 1p
4.a)	Calculează $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ 3 & x & 5 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix} = (3-x)(5-x)(x+8)$ Determinarea soluțiilor: $x=3,\ x=5,\ x=-8$	2p 2p
4.b)	Demonstrarea egalității	3p

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător