Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2018

Clasa a IX a

1. Pentru orice numere reale nenule a,b,c cu $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$ şi $a+b+c\neq 0$ se notează

$A=\dfrac{a}{b+c},\quad B=\dfrac{b}{c+a},\quad C=\dfrac{c}{a+b}.$

a) Arătaţi că numerele a^2,b^2,c^2, sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă şi numai dacă numerele A,B,C au aceeaşi proprietate.

b) Demonstraţi că, dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$, atunci $A+B+C\geq\dfrac{3}{2}$.

2. Demonstraţi că un triunghi ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

3. a) Arătaţi că există cel puţin 1008 perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m+n\leq 2018$ şi $\left[\dfrac{m+1}{n}\right]+\left[\dfrac{n+1}{m}\right]=2$;

b) Demonstraţi că nu există nici o pereche (m,n) de numere naturale nenule pentru care $\left\{\dfrac{m}{n}\right\}+\left\{\dfrac{n}{m}\right\}=1$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real a.

Gazeta Matematică 12/2017

4. Se consideră mulţimea $M=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$. Arătaţi că:

a) $M\setminus\mathbb{Q}\neq\varnothing$ şi $\forall x,y\in M\Rightarrow x\cdot y\in M$.

b) mulţimea M are cel puţin 2018 elemente.

Barem de evaluare şi notare:

(1) (a)Numerele A,B,C sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $2B=A+C \Leftrightarrow \frac{b}{c+a}+\frac{b}{c+a}=\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b} \Leftrightarrow$ $\frac{b}{c+a}-\frac{a}{b+c}=\frac{c}{a+b}-\frac{b}{c+a} \Leftrightarrow \frac{(b-a)(a+b+c)}{b+c}=\frac{(c-b)(a+b+c)}{a+b}$; cum $a+b+c\neq 0$, această ultimă egalitate este echivalentă cu $2b^2=a^2+c^2$, concluzia fiind imediată.	**(4p)**
(b) Inegalitatea propusă este, sau ar trebui să fie, destul de cunoscută ! In literatura de specialitate este cunoscută sub numele de inegalitatea lui Nesbitt. Notăm $b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z \Rightarrow a=\frac{y+z-x}{2}, b=\frac{z+x-y}{2}, c=\frac{x+y-z}{2} \Rightarrow$ $A+B+C=\frac{1}{2}\left(\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-3\right)\geq\frac{2+2+2-3}{2}=\frac{3}{2}$	**(3p)**
(2) Considerăm paralelogramul $ABEC$ şi astfel condiţia din enunţ devine $\lvert\overrightarrow{AE}\rvert=\lvert\overrightarrow{CB}\rvert \Leftrightarrow$ $ABEC$ dreptunghi $\Leftrightarrow AB\perp AC$.	**(4p)** **(3p)**
(3) (a) Pentru $m=n\geq 2$ avem $\left[\frac{m+1}{m}\right]+\left[\frac{m+1}{m}\right]=2+2\left[\frac{1}{m}\right]=2$ şi naturale nenule pentru care $m+m\leq 2018 \Rightarrow 2\leq m\leq 1009$, concluzia fiind imediată. (b) Dacă $m=n \Rightarrow \left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{n}{m}\right\}=0\neq 1$, iar dacă $m\neq n \Rightarrow \frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{mn}\in\mathbb{N}$ presupunem că $(m,n)=1$ şi, din $mn \mid \left(m^2+n^2\right) \Rightarrow m \mid n^2 \wedge n \mid m^2$, contradicţie	**(4p)** **(1p)** **(2p)**
(4) (a) $x=3+2\sqrt{2}\in M \Rightarrow M\setminus\mathbb{Q}\neq\varnothing$, $x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}\in M \Rightarrow xy=u+t\sqrt{2}$, cu $u=ac+2bd, t=ad+bc\in\mathbb{Z}, u^2-2t^2=1 \Rightarrow xy\in M$	**(4p)**
(b) folosind (a), avem că pentru $x=3+2\sqrt{2}\in M \Rightarrow x^2\in M$ şi, dacă, $x^k\in M \Rightarrow x^{k+1}\in M$; cum $x>1 \Rightarrow x^k\neq x^p, \forall k,p\in\mathbb{N}^*, k\neq p$ şi astfel $x^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$, adică mulţimea M este infinită.	**(3p)**

.