Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală Hunedoara , 15 februarie 2018

Clasa a XI a

1. Pentru orice numere reale a,b,c se consideră determinantul

$$D(a,b,c)=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

(a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(x,1,-2)=0$.

(b) Arătaţi că, dacă $a,b,c>0$ şi $ab+bc+ca\leq 3abc$, atunci $D(a,b,c)\geq 27$.

2. **(a)** Se consideră matricile $A(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \dfrac{\sin t}{2} \\ -2\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$ şi mulţimea

$H=\left\{A(t)\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

Arătaţi că:

(i) dacă $A(t),A(u)\in H$, atunci $A(t)\cdot A(u)\in H$

(ii) există un număr întreg k astfel încât $A^{2018}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=k\cdot I_2$.

(b) Demonstraţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{C}\right)$ care verifică simultan următoarele trei proprietăţi: $X^2\neq I_2, X^2\neq -I_2$ şi $X^4=I_2$.

Gazeta Matematică 10/2017

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{nx}$.

Calculaţi $L_1=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}, L_2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\cdot a_n$ şi $L_3=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{2\cdot a_n}$.

4. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$ este convergent şi determinaţi limita sa.

Baremde evaluare şi notare:

(1) (a) Prin împărţire cu $D(x,1,-2)=(x-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3-x & 2\\ -4 & -4 & -3-x\end{vmatrix}=(x-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1-x & 0\\ -4 & 0 & 1-x\end{vmatrix}=(x-1)^3$ se obţine evident soluţia unică $x=1$	**(3p)**
(b) Folosinddinnouproprietăţile determinanţilor se ajunge la $D(a,b,c)=(a+b+c)^3$	**(2p)**
Inegalitateadintre media aritmeticăşiceageometrică, apoiinegalitateadinenunţ, conducla inegalitatea de demonstrat.	**(2p)**
(2) **(a) (i)** $A(t)\cdot A(u)=A(t+u)\in H$	**(3p)**
(i) Se demonstrează inductiv că $A^n(t)=A(nt),\forall t\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*$ de unde avem că $A^{2018}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-I_2\Rightarrow k=-1\in\mathbb{Z}$	**(2p)**
(b) De exemplu $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z+iz & -1\end{pmatrix},z\in\mathbb{C}$ oferă răspunsul (evident este necesară verificarea şi, ideal, modul în care s-a ajuns la această formă) ; Simplele încercări care conduc la rezultate intermediare utile se notează corespunzător.	**(2p)**
(3) $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{nx}=\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}+...+n\cdot\frac{e^{nx}-1}{nx}\right)=\frac{n+1}{2}$	**(2p)**
$L_1=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2}$	**(2p)**
$L_2=0$	**(1p)**
$L_3=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n+1}$; $y_n=\sqrt[n+1]{n+1}-1>0\Rightarrow(1+y_n)^{n+1}\geq C_{n+1}^2\cdot {y_n}^2=\frac{(n+1)n}{2}\cdot {y_n}^2\Rightarrow$ $0<y_n\leq\sqrt{\frac{2}{n}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0\Rightarrow L_3=1$	**(2p)**
(4) Inductiv se demonstrează imediat că $x_n>0,\forall n\geq 1,n\in\mathbb{N}$.	**(3p)**
$x_1=2>\sqrt{2}$ şi , folosind inegalitatea mediilor, avem că $x_{n+1}\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$ aşadar $x_n\geq\sqrt{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$.	
$x_{n+1}-x_n\leq 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$	**(2p)**
Fiind descrescător şi mărginit, şirul este convergent, având limita finită *L;* Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă se ajunge la $L=\sqrt{2}$	**(2p)**

.