Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală Hunedoara , 15 februarie 2018

Clasa a X a

1.

(a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x + 18^x = 6^x$.

(b) Studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \left[\frac{x}{9}\right] + \left[\frac{x}{18}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

2. Arătaţi că, dacă $m = \log_{27} 72$ şi $p = \log_{18} 81$, atunci numărul $q = p(3m+4)$ este raţional.

3. Pentru orice numere complexe x şi y se notează $x * y = x + y + 1,\ x \circ y = x + y + i$ şi $x_n = \underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{n \text{ de } x},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, unde $i^2 = -1$.

(a) Determinaţi numărul natural a pentru care $i_{2018} = ai$;

(b) Determinaţi numărul complex b pentru care funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = bz$ este bijectivă şi are proprietatea că $f(x * y) = (f(x)) \circ (f(y)), \forall x, y \in \mathbb{C}$.

4. Arătaţi că există un singur număr real x pentru care

$$[\log_{27} x] + [\log_{27} 3x] + [\log_{27} 9x] = \log_3\left(\frac{81}{\sqrt[3]{x}}\right).$$

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Gazeta Matematică 10/2017

Barem de evaluare şi notare:

(1) (a)Prin împărţire cu $6^x>0$ se obţine $\left(\frac{3}{2}\right)^x+3^x=1$; funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x+3^x$ este strict crescătoare, deci injectivă. Din $f(x)=1=f(-1)$ se obţine unica soluţie : $x=-1$.	**(4p)**
(b) De exemplu $f(0)=f(1)\Rightarrow f$ nu este injectivă	**(1p)**
Funcţia este crescătoare şi $f(17)=1,\ f(18)=3\Rightarrow 2\notin \operatorname{Im} f\ \Rightarrow f$ nu este surjectivă	**(2p)**
(2) $m=\log_{27}72=\frac{1}{3}\log_3(9\cdot 8)=\frac{1}{3}(2+3\log_3 2)\Rightarrow \log_3 2=\frac{3m-2}{3}$	**(3p)**
$p=\log_{18}81=4\log_{18}3=\frac{4}{2+\log_3 2}=\frac{12}{3m+4}\Rightarrow$ $p(3m+4)=12\in\mathbb{Q}$	**(3p)** **(1p)**
(3) (a) Pentru $i_2=i\circ i=3i, i_3=i_2\circ i=5i, i_4=i_3\circ i=7i$ şi se demonstrează prin inducţie că $i_n=(2n-1)i,\forall n\geq 1\Rightarrow a=4035$ (b) $f(x*y)=b(x+y+1),(f(x))\circ(f(y))=bx+by+i,\forall x,y\in\mathbb{C}\Rightarrow b=i$ Se demonstrează că funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=iz$ este bijectivă.	**(3p)** **(2p)** **(2p)**
(4) Ecuaţia se poate scrie $[\log_{27}x]+\left[\log_{27}x+\frac{1}{3}\right]+\left[\log_{27}x+\frac{2}{3}\right]=4-\frac{1}{3}\log_3 x.$	**(2p)**
Notăm $t=\frac{1}{3}\log_3 x$ şi astfel se ajunge la $[t]+\left[t+\frac{1}{3}\right]+\left[t+\frac{2}{3}\right]=4-t\Rightarrow[3t]=4-t\in\mathbb{Z}$	**(2p)**
$4-t\leq 3t<5-t, t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=1\Rightarrow x=27$	**(3p)**

.