Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală Hunedoara , 15 februarie 2018

Clasa a XII a

1. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie "$*$" care verifică următoarele proprietăţi:

(a) $(x*y)\cdot(x*z)=x*(y+z), \forall x,y,z\in M$

(b) $x*1=x, \forall x\in M$.

(a) Arătaţi că numărul $p=16*\frac{1}{2}$ este întreg.

(b) Determinaţi numărul natural m pentru care dacă $\sqrt{2018}*2018=2018^m$.

2. Se consideră matricele $A(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \frac{\sin t}{2}\\ -2\sin t & \cos t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$ şi mulţimea $H=\{A(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

Arătaţi că:

(a) mulţimea H are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor.

(b) grupul multiplicativ $(H,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$.

3.

(a) Determinaţi mulţimea $\mathcal{A}=\int\frac{1}{x(2+x^6)}dx,\ x\in(0,+\infty)$.

Gazeta Matematică 12/2017

(b) Arătaţi că, dacă $F:(0,1)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, cu proprietatea că $F(1)=\pi$, atunci numărul $F(0)$ este întreg.

4. Se consideră funcţia $f_n:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=tg^n x,\ n\in\mathbb{N}^*$ şi se notează cu F_n o primitivă oarecare a funcţiei f_n.

(a) Arătaţi că, dacă $F_1\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln(2e)$, atunci numărul $L=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F_1(x)$ este întreg;

(b) Calculaţi $M=\lim\limits_{\substack{x\to\\ x>0}}F_3(x)$, ştiind că $F_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\frac{\sqrt{2e}}{2}$.

Barem de evaluare şi notare:

(1) (a) Pentru $y=z=\frac{1}{2}\overset{(a)}{\Rightarrow}\left(x*\frac{1}{2}\right)^2=x*\overset{(b)}{1}=x,\forall x\in M$ cu $p=16*\frac{1}{2}$ $x*\frac{1}{2}=\sqrt{x},\forall x>0\Rightarrow p=4$	**(3p)**
(b) $y=z=1\overset{(a),(b)}{\Rightarrow}x^2=x*2,\forall x\in M;y=2,z=1\Rightarrow x^3=x*3,\forall x\in M$ Inductiv se arată că: $x^n=x*n,\forall x\in M,n\in\mathbb{N}^*$	**(2p)**
Pentru $x=\sqrt{2018},n=2018\Rightarrow m=1009$	**(2p)**
(2)(a) $A(t)\cdot A(u)=A(t+u)\in H,\forall A(t),A(u)\in H$	**(2p)**
Se verifică imediat axiomele grupului	**(3p)**
(b) De exemplu $f:H\to\mathbb{R},f\left(A(t)\right)=t$ este un izomorfism între cele două grupuri (justificare).	**(2p)**
(3) **(a)** $\mathcal{A}=\int\frac{1}{x\left(2+x^6\right)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{2+x^6}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln x-\frac{1}{6}\ln\left(2+x^6\right)\right)+C$	**(4p)**
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\Rightarrow F(x)=\arcsin(2x-1)+C$	**(2p)**
$F(1)=\pi\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}\Rightarrow F(0)=0\in\mathbb{Z}$	**(1p)**
(4) Inductiv $F_1\left(x\right)=-\ln(\cos x)+C\Rightarrow C=1\Rightarrow L=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F_1(x)=1\in\mathbb{Z}$	**(4p)**
$F_3\left(x\right)=\frac{tg^2x}{2}+\ln(\cos x)+k\Rightarrow k=0\Rightarrow M=\lim\limits_{\substack{x\to\\x>0}}F_3(x)=0$	**(3p)**