Barem orientativ de evaluare
Examenul de bacalaureat național 2022
M_mate-info

Test de antrenament 17.01.2022

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	$z=\frac{10i}{1-3i}=\frac{10i\cdot(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=i\cdot(1+3i)=-3+i$,	3p
	de unde $\mathrm{Re}(z)=-3$.	2p
2.	Trebuie ca ecuația $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-(m-2)x+m+1=0$ să aibă două soluții reale distincte, deci $\Delta>0$	1p
	Se calculează discriminantul $\Delta=\left[-(m-2)\right]^2-4(m+1)=m^2-8m$	2p
	Din $m^2-8m>0$ se obține $m\in(-\infty,0)\cup(8,\infty)$.	2p
3.	Condiții de existență: $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\end{cases}$.	1p
	$\log_3(3x)-4\log_x 3=1 \Leftrightarrow \log_3 3+\log_3 x-\frac{4}{\log_3 x}=1 \Leftrightarrow \log_3 x-\frac{4}{\log_3 x}=0$	2p
	Se notează $\log_3 x=t$, de unde $t^2-4=0$ cu soluțiile $t_1=-2,\ t_2=2$ Din $t_1=-2 \Rightarrow \log_3 x=-2$, de unde $x=\frac{1}{9}>0$ Din $t_2=2 \Rightarrow \log_3 x=2$, de unde $x=9>0$.	2p
4.	Se pot forma $A_5^3-A_4^2$ numere	2p
	Se calculează $A_5^3-A_4^2=\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}=48$ numere.	3p
5.	$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=2\vec{i}+5\vec{j}$ $\overrightarrow{CD}=(x_D-x_C)\vec{i}+(y_D-y_C)\vec{j}=(x_D-3)\vec{i}+(y_D+1)\vec{j}$	2p
	Din $3\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ avem $3\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)=-(x_D-3)\vec{i}-(y_D+1)\vec{j}$, de unde $\begin{cases}-x_D+3=6\\-y_D-1=15\end{cases}$	1p 1p
	Se obține $D(-3,-16)$.	1p
6.	Prin ridicare la pătrat avem $(\sin a+\cos a)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 a+\cos^2 a+2\sin a\cos a=\frac{1}{4}$	2p
	$1+2\sin a\cos a=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin a\cos a=-\frac{3}{4}$	1p
	$\sin 2a=2\sin a\cos a=-\frac{3}{4}$.	2p

Subiectul II **(30 puncte)**

1. a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -a\\ a & 1 & a\\ a & 3 & 3\end{vmatrix}$	2p
	$\det(A)=3(1-a^2)$.	3p
b)	Sistem compatibil nedeterminat dacă $rang(A)=rang(\overline{A})<3$. $\det(A)=0 \Leftrightarrow 1-a^2=0 \Rightarrow a\in\{-1,1\}$.	1p
	Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ sistemul este compatibil determinat. Pentru $a=-1$ avem $rang(A)=2$, un minor principal $d_p=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-2\neq 0$ și minor caracteristic $d_c=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-6\neq 0$, deci sistemul este incompatibil. Pentru $a=1$ avem $rang(A)=2$, un minor principal $d_p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$ și minorul caracteristic $d_c=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & -1\end{vmatrix}=0$	2p
	Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a=1$.	1p
c)	De la punctul anterior avem pentru $a=1$ se obține că sistemul este compatibil nedeterminat. Se aleg x, y necunoscute principale și $z=\alpha\in\mathbb{R}$. Ecuațiile principale formează sistemul $\begin{cases}x+y=-\alpha\\ x+3y=-1-3\alpha\end{cases}$, de unde $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1+2\alpha}{2}$. Soluțiile sistemului sunt de forma $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1+2\alpha}{2}, \alpha\right),\ \alpha\in\mathbb{R}$ **Sau** o altă rezolvare a sistemului de ecuații	1p 1p 1p 3p
	Pentru orice soluție $(x_0,\ y_0, z_0)$ se obține $E=4x_0^2+4y_0^2-z_0^2=3\alpha^2+4\alpha+2$, De unde obținem $E_{\min}=\frac{2}{3}$.	1p 1p
2. a)	$\theta\in(3,\infty)$ este elementul neutru dacă $x\circ\theta=\theta\circ x=x,\ \forall x\in(3,\infty)$	1p
	$x\circ\theta=x \Leftrightarrow (x-3)^{\ln(\theta-3)}+3=x \Leftrightarrow (x-3)^{\ln(\theta-3)}=x-3,\ \forall x\in(3,\infty)$.	2p
	Se obține elementul neutru $\theta=e+3\in(3,\infty)$.	2p
b)	$x\in(3,\infty)$ este simetrizabil dacă $\exists x'\in(3,\infty)$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=\theta$	1p
	$x\circ x'=\theta \Leftrightarrow (x-3)^{\ln(x'-3)}+3=e+3 \Leftrightarrow (x-3)^{\ln(x'-3)}=e \Leftrightarrow \ln(x'-3)\ln(x-3)=1$, pentru x diferit de 4, avem: $\ln(x'-3)=\frac{1}{\ln(x-3)}$,	1p 1p

	de unde $x' = e^{\frac{1}{\ln(x-3)}} + 3$, pentru orice $x \in (3,\infty) \setminus \{4\}$	1p
	Elementul nesimetrizabil este $x = 4$.	1p
c)	$x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = \left((x-3)^{\ln(x-3)} + 3\right) \circ x = \left((x-3)^{\ln(x-3)} + 3 - 3\right)^{\ln(x-3)} + 3 = (x-3)^{\ln^2(x-3)} + 3$	2p
	$(x-3)^{\ln^2(x-3)} + 3 = e^2 + 3 \Leftrightarrow (x-3)^{\ln^2(x-3)} = e^2 \Leftrightarrow \ln^3(x-3) = 2$	2p
	Se obține $x = 3 + e^{\sqrt[3]{2}} > 3$.	1p

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	Inegalitatea devine $x - \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0,\ \forall x \in (-1,\infty)$	1p
	$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}, x \in (-1,\infty)$	2p
	Din tabelul de variație al funcției rezultă că *f* este strict descrescătoare pentru $x \in (-1, 0]$ și strict crescătoare pentru $x \in [0,\infty)$, iar valoarea minimă a funcției este 0 pentru $x = 0$.	1p
	Se obține $f(x) \geq 0,\ \forall x \in (-1,\infty)$.	1p
b)	Avem $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} (x - \ln(x+1)) = +\infty$, de unde $x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta.	2p
	Din $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - \ln(x+1)\right] = +\infty$ rezultă că nu există asimptotă orizontală. Se verifică dacă există asimptota oblică $y = mx + n$. $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \ln(x+1) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln(x+1)) = -\infty$. Nu există asimptotă oblică.	1p 2p
c)	Mărginirea: Din punctul a) se obține $f(x) > 0,\ \forall x \in (0,\infty)$. Se arată prin inducție matematică $x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.	2p
	Monotonia: $x_{n+1} - x_n = x_n - \ln(x_n + 1) - x_n = -\ln(x_n + 1) < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă șir strict descrescător.	2p
	Șirul fiind mărginit inferior și descrescător este convergent. Fie *x* este limita șirului, atunci trecând la limită în relația de recurență se obține $x = x - \ln(x+1)$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.	1p
2. a)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$	3p
	$f(0) = a$, de unde $a = 1$	2p
b)	$F'(x) = f(x) = e^{-x}(ax^2 + 4x + a) > 0 \Leftrightarrow a > 0\ si\ \Delta \leq 0$	2p
	$\Delta = 16 - 4a^2 \leq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2] \cup [2,\infty)$ și $a > 0$	2p
	Se obține $a \in [2,\infty)$	1p
c)	$F''(x) = f'(x) = e^{-x}(-ax^2 + 2(a-2)x + 4 - a)),\ \forall x \in \mathbb{R}$	3p
	$\Delta = 16 > 0$	1p
	De unde rezultă că ecuația $F''(x) = 0$ are două rădăcini reale distincte, adică există două puncte de inflexiune.	1p