INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI HUNEDOARA
Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c) simulare - 11.02.2013
Matematică/Informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
• Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

I.Tétel (30 pont)

5p **1.** Mutassuk ki, hogy $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ természetes szám.

5p **2.** Határozzuk meg azon $m\in\mathbb{R}$ számokat úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|-m$ függvény grafikonja **ne** metssze az Ox tengelyt, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén.

5p **3.** Oldd meg $\mathbb{R}$ -ben a $\log_3(4-x^2)=1+\log_3 x$ egyenletet.

5p **4.** Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaz összes részhalmaza közül véletlenszerűen kiválasztunk egy részhalmazt, az ne tartalmazza az 1-et.

5p **5.** Adottak az A,B,C pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-3\vec{j}$ és $\overrightarrow{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}$. Bizonyítsuk be, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok merőlegesek egymásra.

5p **6.** Ha $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ és $\text{tg}x+\text{ctg}x=3$ számítsátok ki a $\text{ctg}2x$ értékét.

II. Tétel (30 pont)

1. A negyedfokú permutációk S_4 halmazában adottak:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} \text{ şi } \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}.$$

5p **a)** Számítsuk ki $\alpha\circ\beta$ -t.

5p **b)** Határozzuk meg az $x\in S_4$ -et úgy, hogy $\alpha\circ x\circ\alpha=\beta$.

5p **c)** Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan $x\in S_4$ amelyre $x^4=\alpha$.

2. Adott $H=\left\{X\in M_3(\mathbb{Z}_5)\mid X=\begin{pmatrix}\hat{1}&a&b\\\hat{0}&\hat{1}&a\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\right\}$.

5p **a)** Hány eleme van a H halmaznak?

5p **b)** Bizonyítsuk be, hogy ha $A,B\in H$ akkor $A\cdot B\in H$.

5p **c)** Keressük meg azt az $X\in H$ mátrixot, melyre fennáll a $X^3=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$ összefüggés.

III. Tétel (30 pont)

1. Adott az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ függvény.

5p **a)** Számítsuk ki $f'(x), x>0$ - et.

5p **b)** Határozzuk meg az f függvény monotonitási intervallumait.

5p **c)** Határozzuk meg azt az $m\in\mathbb{R}$ - t, úgy, hogy az $\ln x=mx$ egyenletnek legalább egy gyöke létezzen a $(0,\infty)$ -ben.

2. Adott az $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ $f(x)=x\cdot e^x$ bijektív függvény, bármely $x\in[0,\infty)$-re és legyen $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, az f függvény inverze.

5p **a)** Számítsuk ki $\int_0^1 f(x)dx$ - et.

5p **b)** Bizonyítsuk be, hogy $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^e g(x)dx=e$.

5p **c)** Számítsuk ki: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x^2}$.