Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a

1. a) Demonstraţi că $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Determinaţi şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ având termenii strict pozitivi cu proprietatea $\frac{a_1+2a_2+...+na_n}{a_1+a_2+...+a_n}=\frac{2n+1}{3}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. a) Demonstraţi că $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că $x^2+y^2+z^2+t(xy+yz+zx)\ge 0$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi oricare ar fi $t\in[-1,2]$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012

3. Se consideră un triunghi ABC şi M un punct interior. Notăm cu G_A, G_B, respectiv G_C centrele de greutate ale triunghiurilor ΔMBC, ΔMAC şi, respectiv ΔMAB.

a) Demonstraţi că triunghiurile ΔABC şi $\Delta G_AG_BG_C$ sunt asemenea;

b) Demonstraţi că triunghiurile ΔABC şi $\Delta G_AG_BG_C$ au acelaşi centru de greutate, dacă şi numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ΔABC.

4. a) Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x-y|<\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $x=y$.

b) Considerăm $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu termenii strict pozitivi şi raţia nenulă. Fie $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $[xa_n]=[ya_n]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $x=y$. (cu $[z]$ s-a notat partea întreagă a numărului real z)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a

1. Determinaţi toate soluţiile reale ale următoarelor ecuaţii:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}=2$;

b) $\dfrac{x^2+1}{x}=2^{x(2-x)}$.

2. Fie $a,b,c\in(0,1)$ şi $x,y,z\in(0,\infty)$ astfel încât $a=(bc)^x$, $b=(ca)^y$ şi $c=(ab)^z$. Demonstraţi că:

a) $x,y,x>0$;

b) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=2$;

c) $\dfrac{1}{x+y+2}+\dfrac{1}{y+z+2}+\dfrac{1}{z+x+2}\le 1$.

3. Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ distincte, astfel încât $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$. Demonstraţi că $a^3=b^3=c^3$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012

4. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte condiţiile:

i) $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$;

ii) $f(0)\neq 0$ şi $f(1)=\dfrac{5}{2}$.

a) Demonstraţi că funcţia f este pară;

b) Determinaţi funcţia f .

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a

1. Pentru orice $x,y\in[0,\infty)$ considerăm determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$.

a) Demonstraţi că $\Delta(x,y)\geq 0$ pentru orice $x,y\in[0,\infty)$;

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\Delta(x,1)}{\ln(x^3-3x+3)}$.

2. a) Daţi exemplu de două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

b) Daţi exemplu de două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ nu există.

3. a) Fie $X\in M_2(\mathbb{C})$. Demonstraţi că $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ există $a_n, b_n\in\mathbb{C}$ astfel încât $X^n=a_nX+b_nI_2$;

b) Fie matricele $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB-BA=A$. Demonstraţi că $A^2=O_2$ şi $AB^nA=O_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică – nr.11/2012

4. Considerăm numerele reale $a,b>0$. Definim şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relaţiile:

$$a_0=a,\ b_0=b,\ a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_nb_n}}{2},\quad b_{n+1}=\frac{b_n+\sqrt{a_nb_n}}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

a) Demonstraţi că şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită;

b) Calculaţi limita celor două şiruri.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi legea de compoziţie "$\circ$" definită pe $\mathbb{R}$ prin relaţia $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $(\mathbb{R}, \circ)$ este monoid comutativ;

b) Determinaţi numerele reale x cu proprietatea $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{\text{de } 2013 \text{ ori de } x} = x$.

2. a) Calculaţi $\int \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} dx$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) Calculaţi $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x} dx$.

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit comutativ şi notăm cu e elementul său neutru. Fie $M = \left\{x \in G \middle| x^2 = e\right\}$.

a) Demonstraţi că M reprezintă un subgrup a grupului $(G, \cdot)$;

b) Arătaţi că $\prod_{x \in G} x = \prod_{x \in M} x$;

c) Spunem că un element $a \in G$ are proprietatea „A", dacă există un subgrup H a lui $(G, \cdot)$ astfel încât $\prod_{x \in H} x = a$.

Demonstraţi că mulţimea $\left\{a \in G \middle| a \text{ are proprietatea "A"}\right\}$ este subgrup a grupului $(G, \cdot)$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012 (enunţ modificat)

4. Fie funcţiile $f : [0,1] \to [0, \infty)$ şi $g : [0,1] \to (0, \infty)$ integrabile. Definim şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prin $a_n = \int_0^1 f^n(x) g(x) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă f este continuă, demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent, dacă şi numai dacă $f(x) \le 1$;

b) Demonstraţi că există $\lim_{n \to \infty} a_n$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro