Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a – tehnologic şi servicii

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_1 > 0, r > 0$. Să se arate că

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}, \forall n \geq 2.$$

2. **a)** Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{2}\right]=\frac{x+2}{3}$.

b) Să se demonstreze inegalitatea: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

3. **a)** Fie ABC un triunghi şi punctele $M \in AB$, $N \in AC$ şi $P \in BC$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ şi P mijlocul segmentului $[BC]$. Să se afle suma $a+b$, unde $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{AN}$.

b) Fie triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ având centrele de greutate G respectiv G_1. Să se arate că $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=3\overrightarrow{GG_1}$.

4. Se consideră un pătrat având perimetrul P_1. Pornind de la acest pătrat construim un şir de n pătrate, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel, al doilea pătrat de perimetru P_2 este pătratul care are ca vârfuri mijloacele laturilor pătratului iniţial, al treilea pătrat este pătratul de perimetru P_3, care are ca vârfuri mijloacele laturilor celui de-al doilea pătrat, ş.a.m.d.

a) Arătaţi că $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică de raţie $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Al câtelea pătrat are perimetrul egal cu o optime din perimetrul primului pătrat?

c) Dacă primul pătrat are perimetrul egal cu 10, câte dintre primele 2013 pătrate au perimetrele numere raţionale?

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a – tehnologic şi servicii

1. Să se arate că numărul $a=\log_{\sqrt{3}}\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este număr natural.

2. **a)** Să se calculeze $A=\lg(2-\sqrt{3})+\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\lg(2+\sqrt{3})$.

b) Dacă $a,b\in(0,1)$, să se demonstreze inegalitatea: $\log_a\frac{2ab}{a+b}+\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 2$.

3. **a)** Să se determine $z\in\mathbb{C}$ dacă $2\overline{z}+z=3+4i$.

b) Să se determine $z\in\mathbb{C}$, care verifică egalitatea $|z-3i|^2=2|z|^2+18$.

4. Să se arate că $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a – tehnologic şi servicii

1. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

b) Să se calculeze $(A - {}^tA)^{2013}$.

2. a) Să se demonstreze că $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

b) Pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, notăm cu $Tr(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală, iar cu ${}^tA$, transpusa sa. Să se arate că oricare ar fi $A \in M_2(\mathbb{R})$, avem $Tr\left(A\,{}^tA\right) \geq 0$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n, n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se arate că toate punctele A_n sunt coliniare.

c) Să se demonstreze că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de n.

4. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 7} + x\right)$.

c) Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a – tehnologic şi servicii

1. Pe $(6,\infty)$ definim legea "$\circ$" prin relaţia $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in (6,\infty)$.

a) Să se determine elementul neutru al legii şi elementele simetrizabile în raport cu legea "$\circ$".

b) Să se determine $x \in (6,\infty)$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2013} = x$.

c) Să se arate că funcţia $f:(0,\infty) \to (6,\infty), f(x) = x + 6$ este izomorfism între grupurile $((0,\infty),\cdot)$ şi $((6,\infty),\circ)$.

2. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X(a) \mid X(a) = I_2 + aA, a > -1\}$.

a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab), \forall a, b > -1$;

b) Să se arate că $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(n) = X((n+1)! - 1)$.

3. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia dată admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine o primitivă F a lui f.

4. Să se calculeze:

a) $\int \sqrt{x^2 + 3}\,dx, x \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{e^{arctgx} + x\ln(x^2+1) + 1}{x^2+1}dx, x \in \mathbb{R}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro