Simularea Examenului de Bacalaureat 2013
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Determinaţi numărul $z \in \mathbb{C}$ care verifică relaţia $3z + i \cdot \overline{z} = 10 + 6i$. (*Cu $\overline{z}$ s-a notat conjugatul lui z.*)

5p **2.** Să se arate că funcţia $f:(1,\infty) \to (2,\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ este bijectivă.

5p **3.** Determinaţi toate valorile reale ale numărului x care verifică ecuaţia $\sqrt{x-3} = 5 - x$.

5p **4.** Câte numere de trei cifre distincte, sunt formate doar din cifre pare?

5p **5.** Fie punctele $A(1,1)$, $B(3,7)$ şi $C(5,3)$. Determinaţi distanţa de la A la dreapta BC.

5p **6.** Demonstraţi relaţia: $\cos 75^o + \cos 85^o + \cos 95^o + \cos 105^o = 0$.

SUBIECTUL II **(30 puncte)**

1. Considerăm mulţimea $G = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \middle| X^2 = O_2 \right\}$. Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, notăm cu $Tr(A) = a + d$.

5p **a)** Demonstraţi că $Tr(B+C) = Tr(B) + Tr(C)$, pentru orice matrice $B, C \in M_2(\mathbb{R})$;

5p **b)** Demonstraţi că pentru orice matrice $A \in G$ avem $Tr(A) = 0$;

5p **c)** Demonstraţi că oricare ar fi matricele $X, Y \in G$ avem $X + Y \neq I_2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$, unde $m \in \mathbb{R}$. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f.

5p **a)** Determinaţi toate rădăcinile lui f în cazul $m = 1$;

5p **b)** Demonstraţi că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m^2 - 2m + 1)$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$;

5p **c)** Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că toate rădăcinile lui f sunt reale.

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, pentru $x \in (0,\infty)$;

5p **b)** Determinaţi imaginea funcţiei f;

5p **c)** Determinaţi toate perechile de numere reale (u,v) cu proprietatea $f(u) + f(v) = \dfrac{2}{e}$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \sin x$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_1(x)\,dx$;

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\pi} f_3'(x) \cdot f_3(x)\,dx$;

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\int_0^1 f_{2012}(x)\,dx \leq \frac{1}{2013}$;