

**Examenul de bacalaureat național 2013**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_mate-info***

**Varianta 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**ÚLOHA I.**

**(30 bodov)**

- 5b 1. Ukážte, že číslo  $a = 3(3 - 2i) + 2(5 + 3i)$  je reálne.
- 5b 2. Je daná funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - 1$ . Vypočítajte  $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ .
- 5b 3. Riešte v množine reálnych čísel rovnicu  $\log_2(2x) = \log_2(1+x)$ .
- 5b 4. Po zdražení o 10%, cena jedného výrobku je 2200 lei. Vypočítajte cenu výrobku pred zdražením.
- 5b 5. Nájdite reálne číslo  $a$  pre ktoré vektory  $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j}$  a  $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$  sú kolineárne.
- 5b 6. Nájdite  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  vediac, že  $\frac{3\sin x + \cos x}{\sin x} = 4$ .

**ÚLOHA II.**

**(30 bodov)**

1. Majme determinant  $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ , kde  $a$  i  $b$  sú reálne čísla.
- 5b a) Ukážte, že  $D(2, 3) = 2$ .
- 5b b) Preverte, či  $D(a, b) = (a-1)(b-1)(b-a)$ , pre ľubovoľné reálne čísla  $a$  i  $b$ .
- 5b c) V karteziánskej sústave  $xOy$  sú dané body  $P_n(n, n^2)$ , kde  $n$  je prirodzené nenulové číslo. Nájdite prirodzené číslo  $n$ ,  $n \geq 3$ , pre ktoré obsah trojuholníka  $P_1P_2P_n$  je 1.
2. Nech  $x_1, x_2, x_3$  sú komplexné korene polynómu  $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$ , kde  $m$  je reálne číslo.
- 5b a) Pre  $m = 4$  ukážte, že  $f(4) = 8$ .
- 5b b) Nájdite reálne číslo  $m$  tak, aby pre korene polynómu  $f$  platil vzťah  $x_1 + x_2 = x_3$ .
- 5b c) Ak  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$ , ukážte, že  $f$  je deliteľný s  $X - 3$ .

**ÚLOHA III.**

**(30 bodov)**

1. Je daná funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ .
- 5b a) Vypočítajte  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5b b) Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode so súradnicou  $x_0 = 0$ , ktorý sa nachádza na grafe funkcie  $f$ .
- 5b c) Dokážte, že  $f(x) \geq 1$ , pre každé  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Pre každé nenulové prirodzené číslo  $n$  majme číslo  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .
- 5b a) Vypočítajte  $I_1$ .
- 5b b) Ukážte, že  $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$ , pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo  $n$ .
- 5b c) Ukážte, že  $1 \leq (n+1)I_n \leq e$ , pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo  $n$ .