

Societatea de Științe Matematice  
din România

Ministerul Educației Naționale  
și Cercetării Științifice



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE  
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 Martie 2016**  
**CLASA a X-a**

**Enunțuri și bareme**

**Problema 1.** Determinați numerele reale  $x \in (2, \infty)$ , care sunt soluții ale ecuației

$$\cos(\pi \log_3(x+6)) \cdot \cos(\pi \log_3(x-2)) = 1.$$

*Supliment Gazeta Matematică*

**Soluție:** Ipoteza conduce la  $\cos(\pi \log_3(x+6)) = \cos(\pi \log_3(x-2)) = \pm 1$ , deci există  $k, l \in \mathbb{Z}$ , de aceeași paritate, astfel încât  $\pi \log_3(x+6) = k\pi$  și  $\pi \log_3(x-2) = l\pi$ . ..... **2p**

Se obțin relațiile  $x+6 = 3^k$  și  $x-2 = 3^l$ . Prin scădere suntem conduși la  $3^k - 3^l = 8$ . ..... **1p**

Egalitatea nu este posibilă dacă  $k, l < 0$ . Atunci  $3^l(3^{k-l} - 1) = 8$ , de unde  $3^l = 1$ , adică  $l = 0$  și apoi  $k = 2$ . La final obținem  $x = 3$ . ..... **4p**

**Problema 2.** Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ , distincte și având același modul, astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = 0.$$

Demonstrați că  $a, b, c$  reprezintă afizele vârfurilor unui triunghi dreptunghic sau echilateral.

**Soluție:** Putem presupune  $|a| = |b| = |c| = 1$ . Ipoteza devine  $(a+b+c)^2 = ab+bc+ca$ , de unde  $(a+b+c)^2 = abc(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$  sau  $(a+b+c)^2 = abc\overline{(a+b+c)}$ . Prin trecere la modul avem  $|a+b+c| \in \{0, 1\}$ . ..... **3p**

Dacă  $|a+b+c| = 0$ , deducem că ortocentrul triunghiului, având vârfuri de afize  $a, b, c$ , coincide cu centrul cercului circumscris aceluiași triunghi, deci acest triunghi este echilateral. .... **1p**

Dacă  $|a+b+c| = 1$ , atunci  $(a+b+c)\overline{(a+b+c)} = 1$ , de unde  $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 1$ , adică  $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ . Atunci două vârfuri ale acestui triunghi sunt diametral opuse, deci este dreptunghic. .... **3p**

**Problema 3.** Fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Determinați cea mai mare valoare a expresiei

$$|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y|,$$

în fiecare dintre următoarele cazuri:

a)  $x, y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $|x| \leq 1$  și  $|y| \leq 1$ ;

b)  $x, y \in \mathbb{C}$ , astfel încât  $|x| \leq 1$  și  $|y| \leq 1$ .

**Soluție:** a) Deoarece pentru orice numere reale  $u, v$  avem  $|u + v| + |u - v| \in \{\pm 2u, \pm 2v\}$ , deducem că  $|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y| \leq \max\{2|\alpha|, 2|\beta|\}$ . ..... **2p**

Aceasta este valoarea maximă, deoarece egalitatea se obține, de exemplu, când  $x = y = 1$ . ..... **1p**

b) Avem egalitatea  $|\alpha x + \beta y|^2 + |\alpha x - \beta y|^2 = 2|\alpha x|^2 + 2|\beta y|^2$ . Dar

$$(|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y|)^2 \leq 2(|\alpha x + \beta y|^2 + |\alpha x - \beta y|^2), \text{ de unde } |\alpha x + \beta y| +$$

$$|\alpha x - \beta y| \leq 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

Valoarea maximă  $2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  se poate obține pentru  $x = 1$  și  $y = i$ . .... **1p**

**Problema 4.** a) Demonstrați că există funcții neperiodice  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică egalitatea

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{5}f(x),$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ;

b) Demonstrați că orice funcție  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică egalitatea

$$g(x+1) + g(x-1) = \sqrt{3}g(x),$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , este periodică.

**Soluție:** a) Căutăm soluții printre funcțiile de forma  $f(x) = a^x$ , unde  $a > 0$ . Obținem egalitatea  $a + a^{-1} = \sqrt{5}$ , de unde  $a = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$ . Se verifică faptul că

funcțiile  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$  și  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$  egalitatea din ipoteză. .... **3p**

b) Fie  $g$  o funcție care verifică egalitatea din ipoteză. Atunci  $g(x+2) + g(x) = \sqrt{3}g(x+1)$ , de unde  $g(x+2) + g(x) = \sqrt{3}(\sqrt{3}g(x) - g(x-1))$ , deci  $g(x+2) = 2g(x) - \sqrt{3}g(x-1)$ . Apoi  $g(x+3) = 2g(x+1) - \sqrt{3}g(x) = 2(\sqrt{3}g(x) - g(x-1)) - \sqrt{3}g(x)$ , de unde  $g(x+3) = \sqrt{3}g(x) - 2g(x-1)$ . Apoi  $g(x+4) = \sqrt{3}g(x+1) - 2g(x) = \sqrt{3}(\sqrt{3}g(x) - g(x-1)) - 2g(x)$ , de unde  $g(x+4) = g(x) - \sqrt{3}g(x-1)$ . În continuare,  $g(x+5) = g(x+1) - \sqrt{3}g(x)$ , deci  $g(x+5) = -g(x-1)$ , de unde  $g(x+6) = -g(x)$ . Apoi  $g(x+12) = -g(x+6) = g(x)$ , de unde obținem concluzia. .... **4p**