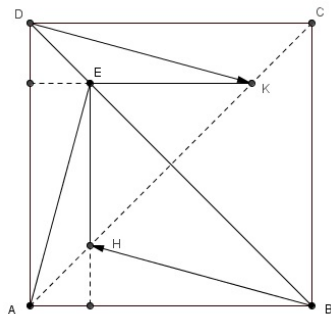


Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016
CLASA a 9-a
Soluții și bareme

Problema 1. Fie $ABCD$ un pătrat și E un punct situat pe diagonala BD , diferit de mijlocul acesteia. Se notează cu H și K ortocentrele triunghiurilor ABE , respectiv ADE . Să se arate că $\overline{BH} + \overline{DK} = 0$.

Soluție.



Se observă că punctele H și K se află pe diagonala AC , deoarece AC este perpendiculară pe BE și DE 2p

De asemenea, H și K se află pe înălțimile duse din E în cele două triunghiuri, care sunt perpendiculare pe laturile pătratului inițial. 2p

Deducem că triunghiul EHK este dreptunghic isoscel, așadar H și K sunt simetrice față de centrul pătratului. Cum și B, D sunt simetrice față de centrul pătratului, obținem concluzia dorită. 3p

Problema 2. Fie a și n două numere naturale nenule, astfel încât $\{\sqrt{n + \sqrt{n}}\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătați că $4a + 1$ este pătrat perfect.

Soluție. Condiția din enunț este echivalentă cu $\sqrt{n + \sqrt{n}} = \sqrt{a} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $n + \sqrt{n} = a + 2k\sqrt{a} + k^2$, deci $\sqrt{n} = 2k\sqrt{a} + b$, unde $b = k^2 - n + a$. Deducem că $n = 4k^2a + b^2 + 4kb\sqrt{a}$, de unde rezultă că $kb\sqrt{a}$ este rațional.

..... **2 puncte**

Dacă \sqrt{a} este rațional, atunci a este pătrat perfect, deci $n + \sqrt{n}$ e pătrat perfect; în particular, $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Rezultă că $m^2 + m$ este pătrat perfect și cum $m^2 \leq m^2 + m < (m + 1)^2$, obținem $m = 0$, deci $n = 0$ — contradicție.

..... **2 puncte**

Prin urmare, $kb = 0$. Pentru $b = 0$, obținem $n = k^2 + a$ și $n = 4k^2a$, de unde $a = k^2/(4k^2 - 1) < 1$ — contradicție. **1 punct**

Așadar, $k = 0$, de unde $n = b^2$ și $a = b + n$, deci $a = b^2 + b$ și $4a + 1 = (2b + 1)^2$ **2 puncte**

Problema 3. Fie numerele reale pozitive a, b, c , astfel încât

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq 1.$$

Să se arate că

$$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{a+b+1} \geq 1.$$

Soluție. Din inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică deducem că

$$\left(\sum (b+c+1) \right) \sum \frac{1}{b+c+1} \geq 9,$$

de unde

$$\left(a+b+c+\frac{3}{2} \right) \sum \frac{1}{b+c+1} \geq \frac{9}{2}.$$

.....2p
 Avem însă

$$\left(a + b + c + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{b + c + 1} = \frac{a}{b + c + 1} + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b + c + 1},$$

și analoge, de unde rezultă

$$\sum \frac{a}{b + c + 1} + 3 + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{b + c + 1} \geq \frac{9}{2}$$

și apoi

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{b + c + 1} \geq \frac{3}{2} - \sum \frac{a}{b + c + 1}.$$

.....3p
 Dacă $\sum \frac{a}{b+c+1} \leq 1$, atunci avem

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{b + c + 1} \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

de unde concluzia.....2p

Soluție alternativă. Fie $S = \sum \frac{1}{b + c + 1}$. Din enunț,

$$\sum \left(\frac{a}{b + c + 1} + 1 \right) \leq 4,$$

de unde $(a + b + c + 1)S \leq 4$ 3 p

Din inegalitatea dintre mediile aritmetică și armonică, rezultă

$$S \geq \frac{9}{2(a + b + c + 1) + 1},$$

deci $S \geq 9 - 2(a + b + c + 1)S \geq 1$ 4 p

Problema 4. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Să se arate că afirmațiile următoare sunt echivalente:

a) Există numerele naturale nenule b, c , astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$;

b) Există un număr natural nenul d , astfel încât ecuațiile $x^2 - ax + d = 0$ și $x^2 - ax - d = 0$ au rădăcinile întregi.

Soluție. Să presupunem că $a^2 = b^2 + c^2$. Numerele b și c nu pot fi ambele impare (suma a două numere impare e de forma $4k + 2$ și nu poate fi pătrat), deci cel puțin unul dintre ele este par, adică produsul bc este par. 1p

Discriminanții celor două ecuații sunt $\Delta_1 = a^2 - 4d$ și $\Delta_2 = a^2 + 4d$. Alegem $d = \frac{bc}{2}$ și avem

$$\Delta_1 = a^2 - 4d = b^2 + c^2 - 4 \frac{bc}{2} = (b - c)^2,$$

iar rădăcinile primei ecuații sunt $x_{1,2} = \frac{a \pm (b - c)}{2}$. Se observă că $x_{1,2}$ sunt numere întregi (dacă b, c sunt ambele pare, și a va fi par, iar dacă b, c au parități diferite, a va fi impar, ca și $b - c$). Similar se arată că și a doua ecuație are rădăcinile întregi. 2p

Reciproc, să presupunem că ecuațiile au rădăcini întregi. Atunci discriminanții acestora trebuie să fie pătrate perfecte. Fie $\Delta_1 = u^2$ și $\Delta_2 = v^2$ 1p

Avem, deci

$$a^2 - 4d = u^2,$$

$$a^2 + 4d = v^2.$$

Deducem ușor că numerele u, v și a au aceeași paritate. 1p

Adunând relațiile, obținem

$$a^2 = \frac{u^2 + v^2}{2} = \left(\frac{u + v}{2} \right)^2 + \left(\frac{u - v}{2} \right)^2,$$

deci, alegând $b = \frac{u+v}{2}$ și $c = \frac{u-v}{2}$, numerele b și c sunt întregi și $a^2 = b^2 + c^2$ 2p