

Universitatea de Vest din Timișoara  
Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

**Clasa a VII -a**

1. Spunem că o mulțime  $A$  de numere naturale este biconvexă dacă pentru orice  $x \in A$  cel puțin unul dintre numerele  $x - 1$ ,  $x + 1$  aparține lui  $A$ . Astfel, mulțimea  $A = \{2016, 2017, 2018\}$  este biconvexă deoarece toate elementele sale au vecini în  $A$ :  $2016 + 1 \in A$ ,  $2017 - 1 \in A$ ,  $2018 - 1 \in A$ . În schimb, mulțimea  $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$  nu este biconvexă, deoarece elementul  $4 \in B$  este izolat în  $B$ :  $4 - 1 \notin B$  și  $4 + 1 \notin B$ .

- Scrieți toate submulțimile biconvexe de 4 elemente ale mulțimii  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Câte submulțimi biconvexe de 3 elemente are mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ ?
- Câte submulțimi biconvexe de 4 elemente are mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ ?

2. Se consideră trapezul dreptunghic  $ABCD$  cu  $AD \perp AB$  și  $BC \perp AB$ , în care  $AB = AD + BC$ . Fie  $M$  mijlocul lui  $[DC]$ , iar  $X$  un punct variabil pe latura  $[AB]$ .

Demonstrați că:

- $\triangle AMB$  este dreptunghic isoscel;
- $m(\angle CXD) = 90^\circ$  dacă și numai dacă  $AX = BC$  sau  $AX = AD$ .

3. Se dă triunghiul  $ABC$ . Pe paralela prin  $B$  la  $AC$  se consideră punctul  $D$  astfel încât  $D$  și  $A$  sunt de aceeași parte a dreptei  $BC$  și  $BD = AB$ , iar pe paralela prin  $C$  la  $AB$  se consideră punctul  $E$  astfel încât  $E$  și  $A$  sunt de aceeași parte a dreptei  $BC$  și  $CE = AC$ . Dacă  $CD \cap AB = \{Q\}$ ,  $BE \cap AC = \{R\}$ ,  $CD \cap BE = \{P\}$ , iar  $L$  este piciorul bisectoarei din  $A$  a triunghiului  $ABC$ , demonstrați că:

- $AQLR$  este romb;
- $\mathcal{A}_{AQPR} = \mathcal{A}_{PBC}$ . ( $\mathcal{A}_{AQPR}$  înseamnă aria patrulaterului  $AQPR$ )

4. Fie  $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x + \frac{1}{4} \geq 0\}$ . Un calculator a fost programat astfel încât, pentru orice număr  $x$  ales din mulțimea  $\mathcal{M}$ , să calculeze succesiv numerele

$$E_0 = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}, E_1 = x + \sqrt{E_0}, E_2 = x + \sqrt{E_1}, E_3 = x + \sqrt{E_2}, \dots, E_{10} = x + \sqrt{E_9}$$

și să afișeze pe ecran numerele  $a = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$  și  $b = \sqrt{E_{10}}$ . Demonstrați că:

- Dacă  $x = r^2 + r$ , unde  $r$  este un număr rațional cu  $r + \frac{1}{2} < 0$ , atunci cele două numere afișate sunt numere raționale.
- Numărul  $a - b$  este rațional, pentru orice  $x \in \mathcal{M}$ .

Timp de lucru: 3 ore