

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a X-a

1. Fie U o mulțime nevidă de numere complexe nenule cu proprietatea că dacă $x, y \in U$, atunci $\frac{x}{y} \in U$.
- (a) Arătați că dacă $x, y \in U$, atunci $xy \in U$.
- (b) Arătați că dacă U are 2016 elemente, atunci U este mulțimea rădăcinilor de ordinul 2016 ale unității.

2. Arătați că dacă pentru orice punct M din planul unui patrulater convex $ABCD$ are loc inegalitatea $MA^2 + MC^2 \geq MB^2 + MD^2$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram și $AC \geq BD$.

3. Arătați că:

- (a) Funcția *cosinus hiperbolic pozitiv*, $\cosh_+ : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$,

$$\cosh_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in [0, \infty)$$

este strict crescătoare, inversabilă și că inversa acesteia este funcția notată $\operatorname{arccosh}_+ : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$\operatorname{arccosh}_+(y) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad \forall y \in [1, \infty).$$

- (b) Pentru orice $y \geq 1$ avem $16y^5 - 20y^3 + 5y \geq 1$ și are loc egalitatea

$$5 \cdot \operatorname{arccosh}_+(y) = \operatorname{arccosh}_+(16y^5 - 20y^3 + 5y).$$

4. Fie I, J intervale și o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f se numește *convexă* (respectiv *concavă*) pe I dacă pentru orice $x, y \in I, x \neq y$ și pentru orice $t \in (0, 1)$ avem $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (respectiv $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$). Dacă în definiția de mai sus inegalitățile sunt stricte, atunci funcția f se numește *strict convexă* (respectiv *strict concavă*).

- (a) Utilizând eventual *inegalitatea lui Bernoulli*: "Pentru orice $s \geq -1$ și pentru orice $0 < r < 1$ are loc $(1+s)^r \leq 1+rs$, cu egalitate dacă și numai dacă $s = 0$ " arătați că funcția $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este strict concavă.
- (b) Arătați că dacă o funcție $f : I \rightarrow J$ este strict concavă (respectiv strict convexă), strict crescătoare și inversabilă, atunci inversa lui f este o funcție strict convexă (respectiv strict concavă). Demonstrați că funcția exponențială e^x , respectiv funcția \cosh_+ sunt strict convexe pe \mathbb{R} și respectiv pe $[0, \infty)$.
- (c) Arătați că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este strict concavă (sau strict convexă) pe I , atunci ecuația $f(x) = ax + b$ are cel mult două soluții în intervalul I .
- (d) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-1}.$$

Timp de lucru: 3 ore