

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"
Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a XII-a

1. a) Arătați că funcția $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2+\sin x}$ admite primitive și orice primitivă a sa este strict crescătoare.

b) Calculați $\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel pe care definim operația "*" prin:

$$a * b = a + b - ab, \forall a, b \in A,$$

și mulțimea $G = \left\{ a \in A \mid \exists x \in A : a * x = x * a = 0 \right\}$.

Arătați că $(G, *)$ este un grup.

3. a) Demonstrați că există o unică funcție $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$x = f(x)e^{f(x)}, \forall x \geq 0.$$

b) Arătați că f este continuă.

c) Arătați că f este derivabilă.

d) Calculați: $\int_0^e f(x)dx$.

4. Pe mulțimea $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție "o" prin:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

a) Demonstrați că (G, \circ) este grup necomutativ.

b) Arătați că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

Notă: Timp de lucru 3 ore.