

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

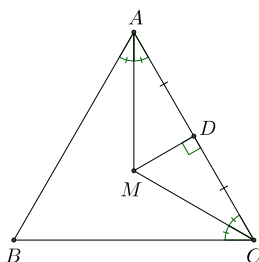
Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a VI-a

Subiectul 1 În triunghiul ABC , bisectoarele unghiurilor \widehat{A} și \widehat{C} se intersectează într-un punct M situat pe mediatoarea laturii (AC) . Știind că $m(\widehat{AMC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

GM nr. 4/1995, pb. E:10920, enunț modificat



Start 1p
 Fie D mijlocul laturii (AC) . Triunghiurile AMD și CMD sunt congruente LUL
 ((MD) este latură comună, unghiurile \widehat{ADM} și \widehat{CDM} sunt drepte, iar $AD = CD$).
 Deducem că $\widehat{MAD} \equiv \widehat{MCD}$ 3p
 Notând cu α măsurile acestor unghiuri, rezultă că $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$. Cum
 suma măsurilor unghiurilor triunghiului AMC este 180° , deducem că
 $m(\widehat{AMC}) = 180^\circ - 2\alpha$ 3p
 Condiția $m(\widehat{AMC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$ revine atunci la $180^\circ - 2\alpha = 4\alpha$, deci la $6\alpha = 180^\circ$.
 Rezultă că $\alpha = 30^\circ$, deci $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$. În fine, suma măsurilor un-
 ghiurilor triunghiului ABC fiind 180° , deducem că $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ 3p

Subiectul 2 a) Arătați că împărțind un număr prim la 30, restul este întotdeauna
 fie 1, fie un număr prim.

b) Dați exemplu de un număr prim al cărui rest la împărțirea la 60 nu este nici 1,
 nici număr prim.

Olimpiadă Cuba, 2010

Start	1p
a) Să presupunem că s-ar putea obține un rest diferit de 1 și de orice număr prim, un rest r din mulțimea $\{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28\}$. Dar toate aceste numere sunt divizibile cu 2, 3 sau 5 (și diferite de 2, 3 și 5), deci și $n = 30q + r$ ar fi divizibil cu 2, 3 sau 5 (și diferit de acestea), prin urmare n n-ar fi prim.	5p
b) Împărțindu-l pe 109 (despre care se verifică că este prim) la 60 obținem restul 49 care nu este prim.	4p

Subiectul 3 Spunem că o mulțime A de numere naturale este *biconvexă* dacă pentru orice $x \in A$ cel puțin unul dintre numerele $x-1$, $x+1$ aparține lui A . Astfel, mulțimea $A = \{2016, 2017, 2018\}$ este biconvexă deoarece toate elementele sale au vecini în A : $2016 + 1 \in A$, $2017 - 1 \in A$, $2018 - 1 \in A$. În schimb, mulțimea $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ nu este biconvexă, deoarece elementul $4 \in B$ este izolat în B : $4 - 1 \notin B$ și $4 + 1 \notin B$.

a) Câte submulțimi biconvexe de 4 elemente are mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$?

b) Câte submulțimi biconvexe de 18 elemente are mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$?

Olimpiadă Franța, prelucrare

Start	1p
a) Dacă a este cel mai mic element al unei submulțimi biconvexe A , iar b este cel mai mare, trebuie ca $a + 1, b - 1 \in A$. Prin urmare submulțimile biconvexe de 4 elemente sunt de forma $\{a, a + 1, b - 1, b\}$, cu $b - 1 > a + 1$. Numărăm submulțimile biconvexe după cel mai mic element al lor:	
- submulțimile în care cel mai mic element este 1 sunt: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}, \dots, \{1, 2, 19, 20\}$, așadar sunt 17 submulțimi;	
- submulțimile în care cel mai mic element este 2 sunt: $\{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 5, 6\}, \dots, \{2, 3, 19, 20\}$, așadar sunt 16 submulțimi;	
- în general, pentru un anumit a fixat, b poate fi orice număr de la $a + 3$ până la 20, deci sunt $18 - a$ submulțimi biconvexe care îl au pe a drept cel mai mic element.	
- pentru $a = 17$ avem o singură submulțime biconvexă de 4 elemente, și anume $\{17, 18, 19, 20\}$.	
În concluzie, sunt $17 + 16 + \dots + 1 = \frac{17 \cdot 18}{2} = 153$ de submulțimi biconvexe cu 4 elemente.	3p
b) Trebuie să scoatem două elemente din mulțimea M astfel încât submulțimea rămasă să fie biconvexă.	
Numerele 1 și 20 au un singur vecin: 2 și 19. Dacă scoatem numărul 2, pentru ca mulțimea să rămână biconvexă trebuie ca celălalt element scos să fie 1 (altfel 1 ar rămâne izolat), iar dacă scoatem numărul 19, atunci trebuie să-l scoatem și pe 20.	
.....	1p
Dacă cel mai mic element scos este 1, atunci al doilea poate fi oricare, în afară de 3 și 19 deci se obțin 17 submulțimi biconvexe de 18 elemente.	
Cel mai mic element scos nu poate fi 2, căci atunci 1 ar rămâne în mulțime și ar fi izolat.	
Dacă cel mai mic element scos este 3, atunci al doilea poate fi oricare mai mare în afară de 5 și 19; sunt așadar 15 asemenea submulțimi.	

Dacă cel mai mic element scos este 4, atunci al doilea poate fi oricare element mai mare ca 4, în afară de 6 și 19, deci sunt 14 asemenea submulțimi.

În general, dacă cel mai mic element scos este $a \in \{3, 4, \dots, 16\}$, al doilea nu are voie să fie $a + 2$ (ar rămâne $a + 1$ izolat) și nici 19 (ar rămâne 20 izolat), deci sunt $18 - a$ submulțimi. 2p

Dacă cel mai mic element scos este 17, celălalt nu poate fi 19 (ar rămâne și 18 și 20 izolate), deci în acest caz sunt 2 submulțimi. 1p

Dacă cel mai mic element scos este 18, al doilea nu poate fi nici 19 (ar rămâne 20 izolat), nici 20 (ar rămâne 19 izolat), deci în acest caz nu avem nicio submulțime. 1p

În fine, putem elimina numerele 19 și 20 (o submulțime).

În total, sunt $17 + 0 + 15 + 14 + 13 + \dots + 4 + 3 + 2 + 2 + 0 + 1 = 18 + \frac{15 \cdot 16}{2} = 138$ 1p

Subiectul 4 Alina și Bogdan joacă următorul joc. La început, pe tablă este scrisă fracția $\frac{2015}{2017}$. O mutare constă din înlocuirea fracției $\frac{m}{n}$ scrise pe tablă ($m, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) cu una dintre fracțiile $\frac{m-1}{n}$ sau $\frac{m}{n-1}$. Cei doi jucători mută alternativ.

Prima mutare o face Alina. Cine obține primul pe tablă un număr natural, câștigă.

a) Arătați că jocul se termină după cel mult 4030 de mutări.

b) Demonstrați că, dacă ambii jucători joacă bine, Bogdan poate întotdeauna câștiga. Cum trebuie să joace Bogdan pentru a câștiga?

Andrei Eckstein

Start 1p

a) Observăm că la fiecare mutare suma dintre numărător și numitor scade cu 1, 2p

deci după 4030 de mutări (dacă jocul nu s-a terminat până atunci) această sumă va fi 2, deci numărul de pe tablă va fi $\frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$ sau $\frac{0}{2} = 0 \in \mathbb{N}$, adică jocul se termină. 1p

b) Strategia lui Bogdan: dacă numărătorul fracției de pe tablă nu este egal cu 1, el micșorează mereu numitorul. În caz contrar, el micșorează numărătorul făcând fracția să fie egală cu 0 și astfel câștigând. Dacă Alina micșorează la vreo mutare a ei tot numitorul, Bogdan poate scrie pe tablă o fracție echiunitară, deci câștigă. Dacă Alina diminuează mereu numărătorul, iar Bogdan numitorul, se ajunge ca pe tablă să fie scris numărul $\frac{1}{4}$, moment în care Bogdan urmează la mutare și câștigă. 6p

Notă: La fiecare subiect, o soluție corectă (alta decât cea propusă în barem), va fi punctată cu 10 p.