

Universitatea de Vest din Timișoara
 Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a VII -a

Subiectul 1

Start 1p

a) Enumerăm submulțimile biconvexe de 4 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ după cel mai mic element al lor:

-submulțimile biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 1:
 $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\};$

-submulțimile biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 2:
 $\{2, 3, 4, 5\}$ și $\{2, 3, 5, 6\};$

-submulțimile biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 3:
 $\{3, 4, 5, 6\}$ **2p**

b) O mulțime biconvexă X de trei elemente este formată din numere consecutive: dacă x este cel mai mic element al lui X , atunci $x + 1 \in A$ ($x - 1 \notin A$, deoarece $x - 1 < x$), iar dacă y este cel mai mare element al lui X , atunci $y - 1 \in X$, și cum X are trei elemente, trebuie ca $y - 1 = x + 1$, deci $X = \{x, x + 1, x + 2\}$ **2p**

Așadar submulțimile biconvexe de trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ sunt: $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \dots, \{2014, 2015, 2016\}$, iar numărul lor este 2014. **2p**

c) Procedând ca la b) deducem că mulțimile biconvexe de patru elemente sunt de forma $\{x, x + 1, y, y + 1\}$, cu $x + 1 < y$ **1p**

Luând în considerare cel mai mic element din submulțime (ca în exemplul de la a)), deducem că mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ are 2013 submulțimi biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 1 (submulțimile de forma $\{1, 2, k, k + 1\}$, unde $k \in \{3, 4, \dots, 2015\}$), 2012 submulțimi biconvexe cu cel mai mic element egal cu 2 (submulțimile de forma $\{2, 3, k, k + 1\}$, cu $k \in \{4, 5, \dots, 2015\}$), 2011 submulțimi biconvexe cu cel mai mic element egal cu 3, ..., o submulțime cu cel mai mic element egal cu 2013, care dau un total de $1 + 2 + \dots + 2013 = 2013 \cdot 1007$ submulțimi. **2p**

Subiectul 2

Start 1p

a) Fie S mijlocul laturii $[AB]$. Atunci $[MS]$ este linie mijlocie în trapez, deci $MS \perp AB$ și

$$MS = \frac{AD + BC}{2} = SB = SA,$$

de unde deducem că $m(\angle MBA) = m(\angle MAB) = 45^\circ$ **2p**

b) Avem de demonstrat două implicații:

(\Leftarrow) : Dacă $AX = BC$ sau $AX = AD$, atunci $m(\angle CXD) = 90^\circ$.

(\Rightarrow) : Dacă $m(\angle CXD) = 90^\circ$, atunci $AX = BC$ sau $AX = AD$.

Demonstrăm (\Leftarrow) :

• Dacă $AX = BC$, atunci $BX = AB - AX = (AD + BC) - BC = AD$. Rezultă că $\triangle AXD \equiv \triangle BCX$ (CC), de unde deducem că $\angle AXD \equiv \angle XCB$. Așadar

$m(\angle AXD) + m(\angle CXB) = m(\angle XCB) + m(\angle CXB) = 90^\circ$, deci $m(\angle CXD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ($\triangle CXD$ este chiar dreptunghic isoscel). **2p**

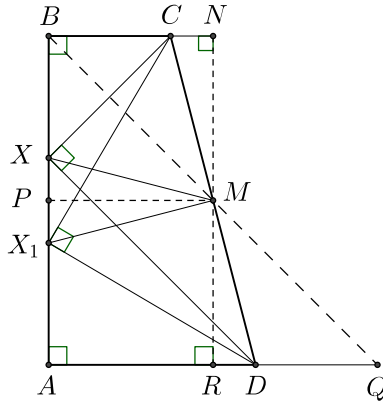
• Dacă $AX = AD$, atunci $BX = BC$, deci $\triangle AXD$ și $\triangle BCX$ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele, de unde deducem că $m(\angle CXD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ **2p**

Demonstrăm (\Rightarrow):

Observăm că $m(\angle CXD) = 90^\circ \iff MX = \frac{CD}{2}$ **1p**

Am văzut deja că există două puncte $X \in [AB]$ cu $m(\angle CXD) = 90^\circ$ (cele pentru care $AX \in \{BC, AD\}$). Notăm cu X și X_1 aceste puncte, ca în figură, și arătăm că pentru celelalte puncte P de pe $[AB]$, $MP \neq \frac{CD}{2}$.

Într-adevăr, dacă P se află între X și X_1 , atunci $MP < MX_1$ (deoarece MX_1 este mai depărtată de piciorul S al perpendicularei pe AB decât MP), și cum $MX_1 = \frac{CD}{2}$, $MP < \frac{CD}{2}$. La fel, dacă $P(P \notin \{X, X_1\})$ nu se află între X și X_1 , atunci $MP > \frac{CD}{2}$ **2p**



Precizări la barem

Variante

a) 1. Demonstrăm că $[BM]$ și $[AM]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ și $\angle BAD$, arătând că M este egal depărtat de BC , BA și AD .

În acest scop construim $MN \perp BC, N \in BC, MR \perp AD, R \in AD$ și $MS \perp AB, S \in AB$ (S este mijlocul lui $[AB]$) și observăm că $MS = MN = MR = \frac{AB}{2}$ (vezi soluția de mai sus). **2p**

2. Fie $\{Q\} = BM \cap AD$.

Deoarece $CM = MD$, $\angle DMQ \equiv \angle BMC$ și $\angle MDQ \equiv \angle BCM$, triunghiurile $\triangle DMQ$ și $\triangle CMB$ sunt congruente (ULU), deci $DQ = BC$ **1p**

Ținând seama de ipoteza $AB = AD + BC$ deducem că $AB = AQ$. Așadar $\triangle BAQ$ este dreptunghic isoscel, deci $m(\angle ABM) = 45^\circ$. Analog se arată că $m(\angle BAM) = 45^\circ$ **1p**

b) 1. (pentru implicația (\Rightarrow))

$m(\angle CXD) = 90^\circ \implies MX = \frac{CD}{2}$, deci X se află atât pe $[AB]$ cât și pe cercul de centru M și rază $\frac{CD}{2}$ **2p**

Cum intersecția dintre un cerc și o dreaptă are cel mult două puncte, X și X_1 sunt singurele de pe $[AB]$ din care $[CD]$ se vede sub un unghi drept. **1p**

2. Folosim teorema și reciproca teoremei lui Pitagora.

Fie $AD = a, BC = b, AX = x$. Atunci $XB = a + b - x$ și, din teorema lui Pitagora, $DX^2 = a^2 + x^2, CX^2 = b^2 + (a + b - x)^2, CD^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2$ **2p**

Ținând seama de aceste egalități, deducem succesiv:

$$m(\angle CXD) = 90^\circ \iff XD^2 + XC^2 = CD^2 \iff$$

$$\iff a^2 + x^2 + (a + b - x)^2 + b^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2 \iff$$

$$\iff a^2 + x^2 + (a + b)^2 - 2x(a + b) + x^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + (a + b)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - (a + b)x + ab = 0 \iff (x - a)(x - b) = 0 \iff x = a \text{ sau } x = b.$$

..... **5p**

3.

$$m(\angle CXD) = 90^\circ \iff m(\angle CXB) + m(\angle DXA) = 90^\circ \iff \angle CXB \equiv \angle XDA \iff$$

$$\iff \triangle BXC \sim \triangle ADX \iff \frac{BC}{XA} = \frac{BX}{AD} \iff AX \cdot XB = BC \cdot AD.$$

..... **3p**

Din ipoteză știm și că $XA + XB = BC + AD$, deci

$$(AD - BC)^2 = (AD + BC)^2 - 4AD \cdot BC = (AX + XB)^2 - 4AX \cdot XB = (AX - XB)^2,$$

adică $AX - XB = AD - BC$ sau $AX - XB = BC - AD$ **3p**

În primul caz, $AX = AD$ (adunând egalitățile $AX + XB = AD + BC$ și $AX - XB = AD - BC$), iar în al doilea caz $AX = BC$ **1p**

Soluții incomplete

b) Sesizarea faptului că trebuie demonstrate două implicații **1p**

Subiectul 3

Start **1p**

a) Arătăm că laturile $[AQ]$ și $[LR]$ sunt paralele și congruente, iar $AQ = AR$.

Din $CE \parallel AB$ rezultă $\frac{AR}{RC} = \frac{AB}{CE} = \frac{AB}{AC}$, de unde obținem $AR = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$.

În mod analog se obține $AQ = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$, deci $AQ = AR$ **1p**

Din teorema bisectoarei, $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$, deci $\frac{BL}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} = \frac{AR}{AC}$, de unde deducem că $LR \parallel QA$ **2p**

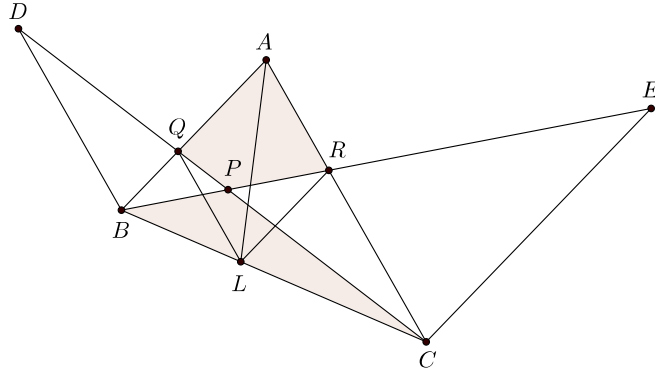
$LR \parallel QA \Rightarrow \angle ALR \equiv \angle BAL \equiv \angle LAR$, deci triunghiul ARL este isoscel cu $AR = LR$. Ținând seama de egalitatea $AR = QA$, obținem că $LR = QA$. Având două laturi opuse paralele și congruente, $AQLR$ este paralelogram **1p**

În plus, $AQLR$ are laturile alăturate $[AQ]$, $[AR]$ congruente, deci este romb. **1p**

b) Demonstrăm că $\mathcal{A}_{BQC} = \mathcal{A}_{ABR}$ **1p**

Notând cu h_1 și h_2 (respectiv) lungimile înălțimilor din C și R ale triunghiurilor BQC și ABR , trebuie să arătăm că $QB \cdot h_1 = AB \cdot h_2$ sau, echivalent, $\frac{QB}{AB} = \frac{h_2}{h_1}$ **1p**

Însă $\frac{h_2}{h_1} = \frac{AR}{AC} = \frac{AB}{AB + AC}$, iar din $\frac{QB}{QA} = \frac{AB}{AC}$ rezultă și $\frac{QB}{AB} = \frac{AB}{AB + AC}$ **2p**



Precizări la barem

Variantă la b)

$\mathcal{A}_{BRL} = \mathcal{A}_{ARL}$, deoarece cele două triunghiuri au aceeași bază $[RL]$, iar vârfurile A și B sunt situate pe o paralelă la RL și analog $\mathcal{A}_{CQL} = \mathcal{A}_{AQL}$ **2p**

Prin adunare, $\mathcal{A}_{BRL} + \mathcal{A}_{CQL} = \mathcal{A}_{AQLR}$. Scăzând din ambii membri ai acestei egalități $\mathcal{A}_{QPL} + \mathcal{A}_{RPL}$ obținem egalitatea cerută. **2p**

Subiectul 4

Start **1p**

a) Fie $x = r^2 + r$, unde $r \in \mathbb{Q}, r + \frac{1}{2} < 0$. Atunci $x + \frac{1}{4} = r^2 + r + \frac{1}{4} = (r + \frac{1}{2})^2 \geq 0$, iar $a = \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{(r + \frac{1}{2})^2} = |r + \frac{1}{2}| = -(r + \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}$ **1p**.

Rezultă că $E_0 = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = r^2 + r + \frac{1}{2} - r - \frac{1}{2} = r^2$, deci $\sqrt{E_0} = \sqrt{r^2} = |r| = -r$ și $E_1 = x + \sqrt{E_0} = r^2 + r - r = E_0$ **2p**

Apoi $E_2 = x + \sqrt{E_1} = r^2 + r - r = r^2$, $E_3 = x + \sqrt{E_2} = r^2 + r - r = r^2$, ..., $E_{10} = r^2$, deci $b = \sqrt{E_{10}} = -r \in \mathbb{Q}$ **1p**

Observație. Dacă $r + \frac{1}{2} \geq 0$, atunci $a = r + \frac{1}{2}$, $b = r + 1$.

b) Remarcăm că $E_0 = x + \frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = (\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2})^2$, deci

$$E_1 = x + \sqrt{E_0} = x + \left| \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right| = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = E_0.$$

..... **2p**
(Se poate folosi și formula radicalilor compuși: $a^2 - b = (x + \frac{1}{2})^2 - (x + \frac{1}{4}) = x^2$, deci

$$\sqrt{E_0} = \sqrt{\frac{x + \frac{1}{2} + x}{2}} + \sqrt{\frac{x + \frac{1}{2} - x}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

și $E_1 = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = E_0$.)

Din $E_0 = E_1$ rezultă $E_2 = x + \sqrt{E_1} = x + \sqrt{E_0} = E_1$, și apoi, succesiv, $E_3 = x + \sqrt{E_0} = E_0$, $E_4 = E_0$, ..., $E_{10} = E_0$ **1p**

Așadar $\sqrt{E_{10}} = \sqrt{E_0} = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$, deci $a - b = -\frac{1}{2}$ **2p**

Precizări la barem

Variantă la a)

Se demonstrează mai întâi punctul b) și apoi că unul din numerele a, b este rațional. **4p**

Soluții parțiale:

a) Se demonstrează că $a \in \mathbb{Q}$ și, ținând seama de b), se deduce că $b \in \mathbb{Q}$, fără a demonstra b). **2p**(1p + 1p)

b) Se confirmă rezultatul în cazuri particulare. **1p**

Notă: La fiecare subiect, o *soluție corectă* (alta decât cea propusă în barem), va fi punctată cu 10 p.