

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Enunțuri

Clasa a VIII -a

1. Pentru orice număr real x se notează $E(x) = 2x - 1$.

- a) Arătați că dacă $x, y \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ și $x + y = 3$, atunci $\sqrt{E(x)} + \sqrt{E(y)} < 3$.
b) Determinați mulțimea valorilor lui $M > 0$ astfel încât inegalitatea

$$10E^2(x) - 60E(x) + 89 < 0$$

să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|x - 2| < M$.

2. Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- a) Arătați că dacă $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ atunci $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.
b) Determinați patru elemente ale mulțimii $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
c) Arătați că mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este infinită.

3. Fie $a > 0$. Dintre toate piramidele triunghiulare regulate cu muchiile laterale de lungime egale cu " a ", arătați că există una de volum maxim. Determinați această pramidă și volumul maxim.

4. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $BD' = \sqrt{3}$, fie M și N mijloacele muchiilor $[B'C']$, respectiv $[C'D']$.

- a) Dacă $MN \cap A'D' = \{T\}$ determinați raportul în care punctul de intersecție al dreptei AT cu dreapta CD' împarte muchia $[CD']$.
b) Determinați perimetrul poligonului obținut prin secționarea cubului cu planul (AMN) .
c) Arătați că oricum am alege 217 puncte în interiorul cubului, există două la o distanță unul față de celălalt mai mică de $\frac{1}{3}$.

Timp de lucru: 3 ore

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a VIII-a

Subiectul 1 Pentru orice număr real x se notează $E(x) = 2x - 1$.

- a) Arătați că dacă $x, y \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ și $x + y = 3$, atunci $\sqrt{E(x)} + \sqrt{E(y)} < 3$.
 b) Determinați mulțimea valorilor lui $M > 0$ astfel încât inegalitatea $10E^2(x) - 60E(x) + 89 < 0$ să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|x - 2| < M$.

Barem: Start (1p)

a) Arată că $\sqrt{E(x)} \leq x$, $\sqrt{E(y)} \leq y$ (2p)

Justifică faptul cel puțin una din inegalitățile de mai sus este strictă (1p)

Însumează inegalitățile de mai sus și deduce $\sqrt{E(x)} + \sqrt{E(y)} < 3$ (1p)

b) Evaluează $10E^2(x) - 60E(x) + 89 = 10(E(x) - 3)^2 - 1 = 40(x - 2)^2 - 1$ (2p)

Deduce că inegalitatea din enunț este echivalentă cu $|x - 2| < \frac{\sqrt{10}}{20}$ (1p)

Deduce $M \in \left(0, \frac{\sqrt{10}}{20}\right]$ (2p)

Subiectul 2 Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că dacă $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ atunci $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.

b) Determinați patru elemente ale mulțimii $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) Arătați că mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este infinită.

Barem: Start (1p)

a) Din $(b - d)\sqrt{2} = c - a$ și $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, se deduce $b = d$ și deci $a = c$ (1p)

b) Dă exemplu de patru elemente distincte (de exemplu $0, -1 + \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, -4 + 3\sqrt{2}$) pentru care verifică apartenența la mulțimea dată (1p)

c) Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, notând $a + b = k$ obținem că $a + b\sqrt{2} = k + b(\sqrt{2} - 1)$.

Inegalitatea $0 \leq a + b\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}$ va fi echivalentă cu $-(1 + \sqrt{2})k \leq b \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} - (1 + \sqrt{2})k$ (2p)

Pentru $k \in \mathbb{Z}$, alegând $b_k = 1 + [-(1 + \sqrt{2})k]$ se verifică că inegalitatea anterioară este adevărată pe baza definiției părții întregi (2p)

Dacă $a_k = k - 1 - \lfloor -(1 + \sqrt{2})k \rfloor$ atunci $z_k = a_k + b_k\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ (1p)

Pentru $k, p \in \mathbb{Z}$, $k < p$ se arată că $b_k < b_p$ și se deduce că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este infinită (2p)

Subiectul 3 Fie $a > 0$. Dintre toate piramidele triunghiulare regulate cu muchiile laterale de lungime egale cu "a" arătați că există una de volum maxim. Determinați această piramidă și volumul maxim.

Barem: Start (1p)

Dacă $SABC$ este o astfel de piramidă cu $SA = SB = SC = a$ atunci aceasta are același volum cu piramida $CSAB$ (de vârf C și bază $\triangle SAB$) (2p)

$$\mathcal{V}_{SVAB} = \frac{1}{6}a^2 \sin(\widehat{ASC})d(C, (SAB)) \dots\dots\dots (1p)$$

\mathcal{V}_{CSAB} este maximă când $m(\widehat{ASB}) = 90^\circ$ (deci $SA \perp SB$) (2p)

și $SC \perp (SAB)$ (deci $d(C, (SAB)) = SC$) (2p)

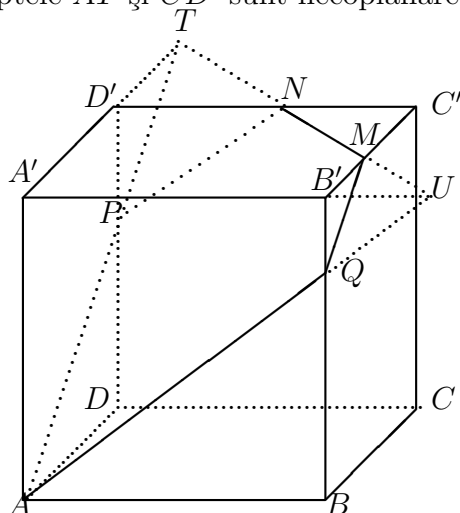
Deduce că volumul maxim se obține pentru piramida tridreptunghică ($SA \perp SB \perp SC$) regulată, iar acest volum maxim este $\frac{a^3}{6}$ (2p)

Subiectul 4 În cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $BD' = \sqrt{3}$, fie M și N mijloacele muchiilor $[B' C']$, respectiv $[C' D']$.

- Dacă $MN \cap A'D' = \{T\}$ determinați raportul în care punctul de intersecție al dreptei AT cu dreapta CD' împarte muchia $[CD']$.
- Determinați perimetrul poligonului obținut prin secționarea cubului cu planul (AMN) .
- Arătați că oricum am alege 217 puncte în interiorul cubului, există două la o distanță unul față de celălalt mai mică de $\frac{1}{3}$.

Barem: Start (1p)

a) Obține că muchia cubului este 1 (0,5p)
Dreptele AT și CD' sunt necoplanare, deci nu se intersectează (0,5p)



b) Fie $AT \cap DD' = \{P\}$.

Din $\triangle MNC' \equiv \triangle NTD'$ (justificată) deduce $D'T = MC' = \frac{1}{2}$ (0,5p)

Justifică $\triangle PD'T \sim \triangle PDA$ și deduce $\frac{D'P}{PD} = \frac{D'T}{AD} = \frac{1}{2}$ (0,5p)

Notăm $(AMN) = \alpha$

Cum $T \in MN \subset \alpha$ se deduce că $T \in \alpha$ și deci $AP = AT \subset \alpha \cap (ADD')$. (0,5p)

Fie $U = MN \cap A'B'$. Atunci $U \in \alpha$ (0,5p)

Se deduce $AU = \alpha \cap (ABB')$ (0,5p)

Dacă $AU \cap BB' = \{Q\}$ atunci intersecția dintre α și fețele cubului este pentagonul $AQMNP$ (1p)

Deduce $\frac{B'Q}{QB} = \frac{1}{2}$ și deci $BQ = \frac{2}{3}$ (0,5p)

Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiuri bine specificate se deduce că $AQ = AP = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $MQ = NP = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1p)

Se obține că perimetrul pentagonului este $\sqrt{13} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1p)

c) Descompune cubul în 216 "cubulețe" de muchie $\frac{1}{6}$ cu fețele paralele cu cele ale cubului și deduce că există cel puțin unul care să conțină două dintre aceste 217 puncte (1p)

Distanța dintre aceste două puncte este mai mică decât diagonala "cubulețului" ce le conține, deci mai mică decât $\frac{\sqrt{3}}{6} < \frac{1}{3}$ (1p)

Notă: La fiecare subiect, o soluție corectă (alta decât cea propusă în barem), va fi punctată cu 10 p.