

Soluții și barem orientativ de corectare la clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 30$ și

$$x_{n+2} = \text{restul împărțirii numărului } (26x_{n+1} + 3x_n) \text{ prin } 2016.$$

Arătați că:

- a) x_n este multiplu de 3 pentru orice $n \geq 2$.
 b) există două numere naturale nenule k și p astfel încât $x_n = x_{n+p}$ pentru orice $n \geq k$.
 c) numerele k și p satisfac condițiile: $k \neq 1$, iar p este par.

Soluție și barem: Start1p

- a) arată că $3|x_3 = 753$ și apoi că dacă $3|x_n$ și $3|x_{n+1}$, atunci $3|x_{n+2}$, de unde rezultă proprietatea 2p
 b) deoarece $(x_n, x_{n+1}) \in \{0, 1, \dots, 2015\} \times \{0, 1, \dots, 2015\}$ pentru orice $n \geq 1$ și $|\mathbb{N}| = \infty > 2016^2$, rezultă că există $k, l \in \mathbb{N}$ cu $k < l$ și k și l minime, astfel încât $(x_k, x_{k+1}) = (x_l, x_{l+1})$ 2p
 arată prin inducție că pentru $p = l - k$ are loc $x_n = x_{n+p}$ pentru orice $n \geq k$ 2p
 c) arată prin inducție că $x_{2n} = \mathcal{M}9 + 3$ și $x_{2n+1} = \mathcal{M}9 + 6$ pentru orice $n \geq 1$ 2p
 de unde deduce că $k \neq 1$, iar p este par. 1p

2. Se consideră expresia $E(u, v, w) = u^4 + v^4 + w^4 - 2u^2v^2 - 2u^2w^2 - 2v^2w^2 + 4uvw(u + v + w)$, un număr real pozitiv $a > 0$ fixat și mulțimea $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} | u^2 + v^2 + w^2 = a^2\}$. Determinați numărul $M = \max\{E(u, v, w) | (u, v, w) \in A\}$, precum și toate tripletele $(u, v, w) \in A$, pentru care $E(u, v, w) = M$.

Soluție și barem: Start1p

- scrie expresia sub forma $E(u, v, w) = (\sum u^2)^2 - 2\sum(uv - uw)^2$ 3p
 astfel că $E(u, v, w) \leq (u^2 + v^2 + w^2)^2$, cu egalitate dacă și numai dacă $uv = uw = vw$ 2p
 prin urmare $M = a^4$ 2p
 și tripletele din A pentru care se atinge maximul sunt $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(a, a, a)$ și $(\pm a, 0, 0), (0, \pm a, 0), (0, 0, \pm a)$ 2p

3. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului său înscris, O centrul cercului său circumscris, iar $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ și $F \in (AB)$ punctele de contact cu laturile triunghiului ale cercurilor exînscrise.

- a) Arătați că dreptele AD , BE și CF sunt concurente într-un punct N .
 b) Arătați că

$$(a + b + c)\overline{PN} = (-a + b + c)\overline{PA} + (a - b + c)\overline{PB} + (a + b - c)\overline{PC},$$

pentru orice punct P din planul triunghiului.

- c) Arătați că punctele G , I și N sunt coliniare.
 d) Determinați distanța dintre punctele O și N .

Soluție și barem: Start1p

- a) Observă că $BD = p - c$, $CD = p - b$ și analoagele, și aplică reciproca teoremei lui Ceva, obținând concurența cerută 2p
 b) Deoarece punctele D, E, F au coordonatele baricentrice omogene $D(0 : p - b : p - c)$, $E(p - a : 0 : p - c)$, resp. $F(p - a : p - b : 0)$, punctul N va avea coordonatele $N(p - a : p - b : p - c)$, proprietate echivalentă cu cea cerută 2p
 c) arată că $2\overline{GI} + \overline{GN} = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$ 1p
 și deduce că punctele G, I, N sunt coliniare 1p
 d) folosind b), arată că $ON^2 = R^2 - 4Rr + 4r^2$ 2p

și deduce, folosind inegalitatea $R \geq 2r$, că $ON = R - 2r$ 1p

4. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se consideră picioarele înălțimilor $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ și $C_1 \in AB$. Prin vârfurile triunghiului se duc dreptele l, m, n , astfel încât $A \in l$, $B \in m$, $C \in n$ și $l \perp B_1C_1$, $m \perp C_1A_1$, $n \perp A_1B_1$. Arătați că dreptele l, m, n sunt concurente.

Soluție și barem: Start1p

Consideră centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC 1p

onservă că B_1C_1 este antiparalelă cu BC în raport cu unghiul \widehat{BAC} 2p

și deduce că B_1C_1 este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscris3p

deduce că $O \in l$ 2p

analog $O \in m$ și $O \in n$, astfel că dreptele l, m, n sunt concurente în O1p