

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a X-a

Subiectul 1

Start	1p
(a) Din $x = y \in U$ deduce $\frac{x}{x} = 1 \in U$	1p
Din $1, x \in U$ deduce $\frac{1}{x} = x^{-1} \in U$	2p
Din $x, y \in U$ deduce $x, y^{-1} \in U$, apoi $\frac{x}{y^{-1}} = xy \in U$	2p
(b) Consideră $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{2016}\}$ și $x_k \in U$ arbitrar; afirmă că $x_k x_1, x_k x_2, \dots, x_k x_{2016}$ sunt distincte și elemente ale lui U , de unde deduce $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{2016}\} = \{x_k x_1, x_k x_2, \dots, x_k x_{2016}\}$	2p
Face produsul elementelor lui U în cele două moduri obține $x_k^{2016} = 1$; finalizează	2p
Observație. Punctul (b) se poate aborda și direct, independent de punctul (a), scriind $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{2016}\} = \left\{ \frac{x_1}{x_k}, \frac{x_2}{x_k}, \dots, \frac{x_{2016}}{x_k} \right\}$.	

Subiectul 2

Start	1p
Consideră $M(z), A(a), B(b), C(c), D(d)$ și rescrie inegalitatea din ipoteză	

$$z(\bar{b} + \bar{d} - \bar{a} - \bar{c}) + \bar{z}(b + d - a - c) \geq |b|^2 + |d|^2 - |a|^2 - |c|^2$$

pe baza egalităților $MA^2 = |z - a|^2 = (z - a) \cdot \overline{z - a} = |z|^2 + |a|^2 - z\bar{a} - \bar{z}a$ și a celorlalte egalități analoage 3p
 Pentru orice z avem deci inegalitatea $2\operatorname{Re}(\bar{z} \cdot (b + d - a - c)) \geq |b|^2 + |d|^2 - |a|^2 - |c|^2$; dacă presupunem $f \stackrel{\text{not}}{=} b + d - a - c \neq 0$, atunci se obține contradicție (alegând de exemplu $z = \alpha f$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar); rezultă $f = 0$, adică $a + c = b + d$, de unde $ABCD$ este paralelogram 3p
 Avem că $2(|b|^2 + |d|^2) \leq 2(|a|^2 + |c|^2)$ din care scăzând membru cu membru $|b + d|^2 = |a + c|^2$ și utilizând identitatea paralelogramului obținem $|b - d|^2 \leq |a - c|^2 \Leftrightarrow |b - d| \leq |a - c|$, adică $BD \leq AC$ 3p
Observație. Oricărei alte soluții corecte (sintetice, analitice, etc.) i se acordă punctajul maxim.

Subiectul 3

Start	1p
(a) Pentru $x > y \geq 0$ arată că avem $\cosh_+(x) - \cosh_+(y) = \frac{e^y(e^{x-y} - 1)(1 - e^{-(x+y)})}{2} > 0$ și deduce că funcția \cosh_+ este strict crescătoare	2p
Arată că pentru $y \in [1, \infty)$, în urma substituției $e^x = t \geq 1$, ecuația $\cosh_+(x) = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = y$ are unica soluție supraunitară $t = y + \sqrt{y^2 - 1}$, de unde deduce că funcția \cosh_+ este inversabilă, precum și expresia din enunț a inversei acesteia	3p

(b) Factorizează $16y^5 - 20y^3 + 5y - 1 = (y - 1)(4y^2 + 2y - 1)^2 \geq 0$ 1p
 Scrie echivalent egalitatea de la punctul (b) din enunț, aplicându-i funcția (injectivă) \cosh_+ , astfel:

$$\cosh_+(5 \cdot \operatorname{arccosh}_+(y)) = 16y^5 - 20y^3 + 5y \quad \text{.....} \quad 1p$$

Demonstrează prin calcul direct că avem

$$\cosh_+(5x) = 16\cosh_+^5(x) - 20\cosh_+^3(x) + 5\cosh_+(x)$$

și deduce egalitatea din enunț 2p

Subiectul 4

Start 1p

(a) Pentru $t \in (0, 1)$ și $x \neq y \in (0, \infty)$ (care implică $\frac{x}{y} - 1 \neq 0$, dar și $\frac{x}{y} - 1 > -1$) aplică inegalitatea lui Bernoulli:

$$\left(1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)\right)^t < 1 + t \cdot \left(\frac{x}{y} - 1\right),$$

despre care observă, după calcule și logaritmare, că este echivalentă cu concavitatea strictă a funcției \ln 2p

(b) Fie $t \in (0, 1)$ și $x \neq y \in J$; atunci există $a \neq b \in I$ astfel încât $x = f(a), y = f(b)$; convexitatea strictă a inversei lui f înseamnă:

$$f^{-1}(tx + (1 - t)y) < tf^{-1}(x) + (1 - t)f^{-1}(y), \quad \text{.....} \quad 1p$$

care prin aplicarea funcției f (strict crescătoare) este echivalentă cu $tx + (1 - t)y < f(tf^{-1}(x) + (1 - t)f^{-1}(y))$ și apoi cu

$$tf(a) + (1 - t)f(b) < f(ta + (1 - t)b),$$

care este adevărată în virtutea concavității stricte a lui f 1p

Aplică această proprietate și deduce pe baza punctului (a) că funcția e^x este strict convexă și apoi că funcția \cosh_+ este și ea strict convexă 1p

(c) Presupune că ecuația ar avea trei soluții distincte $x_1 < x_2 < x_3$; atunci există $t \in (0, 1)$ astfel încât $x_2 = tx_1 + (1 - t)x_3$; apoi obține $ax_2 + b = f(x_2) > tf(x_1) + (1 - t)f(x_3) = t(ax_1 + b) + (1 - t)(ax_3 + b) = ax_2 + b$ – contradicție 2p

(d) Observă că $x \geq 1$; scrie echivalent ecuația astfel:

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = (x - 1) \cdot \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Aplicând proprietățile din problema 3 și din punctul (b) deduce că funcția din membrul stâng este strict concavă pe $[1, \infty)$; din punctul (c) rezultă că ecuația are cel mult două soluții, despre care observă că sunt $x = 1$ și $x = 2$ 2p

Notă: La fiecare subiect o soluție corectă (alta decât cea propusă în barem) va fi punctată cu 10 p.