

Soluții și barem orientativ de corectare la clasa a XII-a

1. a) Arătați că funcția $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2+\sin x}$ admite primitive și orice primitivă a sa este strict crescătoare.

b) Calculați $\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Soluție și barem: Start **1p**

a) f este continuă pe $[0, 2\pi]$ deci admite primitive **1p**

Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $F'(x) = \frac{1}{2+\sin(x)}$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, deci F este cresc

vatoare **1p**

b) Pe orice interval $I \subset [0, 2\pi]$, cu $\pi \notin I$, primitiva se poate calcula printr-o schimbare de variabilă:

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx = \int \frac{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Pe intervalul $[0, 2\pi]$, o primitivă F a lui f va fi:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} + c_1, & x \in [0, \pi) \\ c_2, & x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} + c_3, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Deoarece F trebuie să fie continuă, $c_1 = c_2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, $c_3 = c_2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **3p**

Din consecința teoremei lui Lagrange rezultă că F este derivabilă în $x = \pi$ și $F'(\pi) = f(\pi)$. Rezultă că

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel pe care definim operația " $*$ " prin:

$$a * b = a + b - ab, \forall a, b \in A,$$

și mulțimea $G = \left\{ a \in A \mid \exists x \in A : a * x = x * a = 0 \right\}$.

Arătați că $(G, *)$ este un grup.

Soluție și barem: Start **1p**

$*$ este asociativă **2p**

$*$ este lege de compoziție pe G : Pentru $a, b \in G$ există $x, y \in A$ astfel încât $a * x = x * a = 0$ și $b * y = y * b = 0$. Atunci $(a * b) * (y * x) = a * (b * y) * x = a * x = 0$, deci $a * b \in G$ **3p**

Elementul neutru este 0 **2p**

Orice element $a \in G$ are un simetric **2p**

3. a) Demonstrați că există o unică funcție $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$x = f(x)e^{f(x)}, \forall x \geq 0.$$

- b) Arătați că f este continuă.
 c) Arătați că f este derivabilă.

d) Calculați: $\int_0^e f(x)dx$.

Soluție și barem: Start **1p**

a) Funcția $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definită prin $g(y) = ye^y, \forall y \geq 0$, este continuă, strict crescătoare și verifică relațiile $g(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, astfel că este bijectivă, cu inversa de asemenea continuă, strict crescătoare și cu proprietățile $g^{-1}(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g^{-1}(x) = \infty$. Funcția $f = g^{-1}$ verifică ecuația $x = f(x)e^{f(x)}, \forall x \geq 0$, și f este mărginită pe orice interval mărginit. **2p**
 b) Fie $x_0 \geq 0$ și $x \geq 0, x \neq 0$. Atunci

$$(*) \quad x - x_0 = f(x)e^{f(x)} - f(x_0)e^{f(x_0)} = (f(x) - f(x_0))e^{f(x)} + f(x_0)(e^{f(x)} - e^{f(x_0)}) \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

Aplicând teorema lui Lagrange funcției $y \mapsto e^y$ pe intervalul cu capetele $f(x)$ și $f(x_0)$ și obținem un c între $f(x)$ și $f(x_0)$ încât

$$e^{f(x)} - e^{f(x_0)} = e^c(f(x) - f(x_0)).$$

Înlocuind în (*), obținem:

$$x - x_0 = (f(x) - f(x_0))(e^{f(x)} + f(x_0)e^c)$$

Trecem la limită pentru $x \rightarrow x_0$, ținând cont că $e^{f(x)} + f(x_0)e^c > 1$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ **1p**

c) Din

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{e^{f(x)} + f(x_0)e^c},$$

trecând la limită pentru $x \rightarrow x_0$, rezultă că f este derivabilă și

$$f'(x_0) = \frac{1}{e^{f(x_0)} + f(x_0)e^{f(x_0)}} \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

d) f este strict crescătoare, continuă și $f(e) = 1$. Restricția lui f la intervalul $[0, e]$ este inversabilă cu inversa $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, e], f^{-1}(y) = ye^y$ **1p**
 Avem că:

$$\int_0^e f(x) dx + \int_0^1 f^{-1}(y) dy = e.$$

Rezultă că $\int_0^e f(x) dx = e - 1$ **2p**

4. Pe mulțimea $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție "o" prin:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

- a) Demonstrați că (G, \circ) este grup necomutativ.
 b) Arătați că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

Soluție și barem: Start **1p**

* este lege de compoziție pe G **1p**

* este asociativă **1p**

Elementul neutru este perechea $(1, 0)$ **1p**

Orice element este inversabil cu $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ **2p**

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, perechea $(-1, a)$ este un element de ordin 2 **2p**

Dacă $(a, b) \in G$ este un element de ordin 3, atunci

$$(1, 0) = (a, b)^3 = (a^3, b(a^2 + a + 1)) \implies a = 1, b = 0.$$

Dar $(1, 0)$ este elementul neutru și are ordinul 1, astfel că G nu conține elemente de ordin 3 **2p**