

1. Se dă proporția $\frac{x-3}{y} = \frac{x}{y+4}$ cu $x > 3$ și $y > 0$. Arătați că $\frac{x}{y} > \sqrt{3} - 1$.

(Prelucrare supliment GM 11/2016)

Soluție

$$\frac{x-3}{y} = \frac{x}{y+4} \Rightarrow (x-3)(y+4) = xy \Rightarrow xy + 4x - 3y - 12 = xy \Rightarrow 4x = 3y + 12 \Rightarrow \quad \quad \quad \mathbf{3\ p}$$

$$\Rightarrow 4x > 3y \quad \left| \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{4} \cdot y \quad \left| \cdot \frac{1}{y} \text{ (care este pozitiv)} \Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{3}{4} \quad \quad \quad \mathbf{3\ p} \right.$$

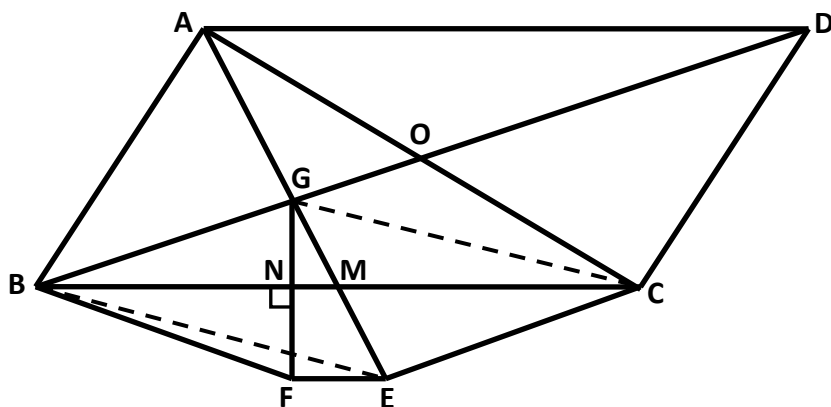
$$\frac{3}{4} > \sqrt{3} - 1 \quad \left| +1 \Leftrightarrow \frac{7}{4} > \sqrt{3} \quad \left| \cdot 4 \Leftrightarrow 7 > 4\sqrt{3} \quad \left| ()^2 \Leftrightarrow 49 > 48 \text{ adevărat. Deci } \frac{x}{y} > \frac{3}{4} > \sqrt{3} - 1 \quad \mathbf{1\ p} \right. \right.$$

2. Fie paralelogramul $ABCD$, M mijlocul laturii $[BC]$ și $\{G\} = AM \cap BC$

a) Arătați că $AG = 2 \cdot GM$

b) Fie E și F simetricele punctului G față de punctul M , respectiv față de dreapta BC .

Arătați că $BCEF$ este trapez isoscel



Soluție

a) În $\triangle ABC$, AM și BO sunt mediane $\Rightarrow G$ este centrul de greutate al $\triangle ABC$ **1 p**

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM \text{ și } GM = \frac{1}{3}AM \Rightarrow AG = 2 \cdot GM \quad \quad \quad \mathbf{1\ p}$$

b) NM linie mijlocie în $\triangle GEF \Rightarrow NM \parallel FE \Rightarrow FE \parallel BC$ **1 p**

$[BC]$ și $[GE]$ se înjumătățesc $\Rightarrow BECG$ paralelogram $\Rightarrow [BG] \equiv [CE]$ **2 p**

$[BN]$ mediatoarea lui $[GF] \Rightarrow [BG] \equiv [BF]$. În concluzie $[BF] \equiv [CE]$ **2 p**

3. Fie numerele întregi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{40} = 1$ și suma

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{40}.$$

a) Arătați că $S \div 2$

b) Arătați că $S \div 4$

c) Aflați valoarea minimă a expresiei $E = a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_{38} a_{39} a_{40} + a_{39} a_{40} a_1 + a_{40} a_1 a_2$

Soluție

a) Există un număr par de factori de -1 și, prin urmare, un număr par de factori de 1 . Fie $2k$ numărul factorilor de -1 și $2p$ numărul factorilor de $1 \Rightarrow S = -2k + 2p = 2 \cdot (p - k) \div 2$ **2 p**

b)
$$2k + 2p = 40 \Rightarrow k + p = 20 \text{ este număr par} \quad \left. \begin{array}{l} \\ 2k \text{ este număr par} \end{array} \right\} \Rightarrow k + p - 2k = p - k \text{ este număr par} \quad \quad \quad \mathbf{2\ p}$$

c) Valoarea minimă este -40 și este atinsă când toate numerele sunt -1 **3 p**

4. Fie $\triangle ABC$ cu $AB = BC = 10$ cm și $m(\angle ABC) = 90^\circ$. Se consideră punctul G în interiorul triunghiului ABC astfel încât $m(\angle GAB) = m(\angle GCB) < 22^\circ$

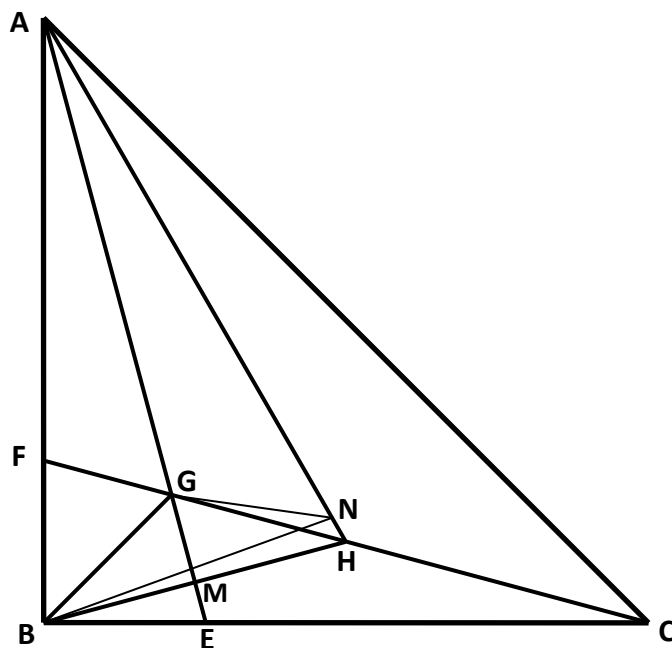
a) Arătați că $[BG]$ este bisectoarea unghiului ABC .

b) Fie $H \in (GC)$ astfel încât $[AG]$ este bisectoarea unghiului BAH .

Arătați că, dacă $[AH] \equiv [AB]$ atunci $m(\angle GAB) = 15^\circ$.

c) Arătați că, dacă $m(\angle GAB) = 15^\circ$ atunci $[AH] \equiv [AB]$.

Soluție



a) $\angle GAC \equiv \angle GCA$, $\triangle GAB \equiv \triangle GCB$

3 p

b) $AG \cap BC = \{E\}$, $CG \cap AB = \{F\}$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABH \text{ isoscel cu } AM \text{ bisectoare} \Rightarrow AM \perp BH \text{ si } \angle BGM \equiv \angle HGM \\ \triangle BFG \equiv \triangle BEG \text{ (LLL)} \Rightarrow \angle BGM \equiv \angle BGF \\ m(\angle BGM) + m(\angle BGF) + m(\angle HGM) = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle BGM) = m(\angle BGF) = m(\angle HGM) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle BAM) = 15^\circ$$

2 p

c) Presupunem, prin reducere la absurd că $[AH] \not\equiv [AB]$.

Atunci există un alt punct $N \in AH$ astfel încât $[AN] \equiv [AB]$.

În $\triangle BCF$ avem $m(\angle BFC) = 75^\circ$. În plus $m(\angle BGF) = m(\angle BGM) = 60^\circ$.

$$[AN] \equiv [AB] \Rightarrow m(\angle BGM) = m(\angle MGN) = 60^\circ. \text{ Deci } m(\angle FGN) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow F, G, N$ coliniare, contradicție.

2 p