



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a X-a

1. Fie $u, v \in \mathbb{C}$ cu proprietatea $u + v = 10$ și $|u| = |v| = 13$. Demonstrați că $u^{2016} + v^{2016} \in \mathbb{R}$.

Supliment Gazeta Matematică

2. a) Demonstrați că $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- b) Fie $a, b, c \in (0, 1)$ cu proprietatea $a + b + c = 1$. Demonstrați că $\frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} \geq \frac{9}{2}$.

Revista de Matematică din Hunedoara

3. a) Fie $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ strict crescătoare. Demonstrați că funcția $f \cdot g$ este strict crescătoare;
b) Demonstrați că funcția $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 35^x - 15^x - 14^x + 6^x$ este strict crescătoare;
c) Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $35^{x^2} + 6^{x^2} = 15^{x^2} + 14^{x^2} + 12$.

4. a) Demonstrați că, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha + \beta = 1$, avem identitatea

$$|\alpha z + \beta w|^2 = \alpha |z|^2 + \beta |w|^2 - \alpha \beta |z - w|^2;$$

- b) Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ și $P \in (AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Să se demonstreze că $AM^2 + BN^2 + CP^2 \geq \frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

Revista de Matematică din Hunedoara

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.