

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
HUNEDOARA
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VII-a

Barem orientativ de notare

Subiectul I

Determinați numerele naturale nenule a și b astfel încât

$$ab + b + 2018 = ab^2$$

Soluție și barem:

$$\Leftrightarrow ab^2 - ab - b = 2018 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow ab(b-1) - (b-1) = 2019 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)(b-1) = 2019 \quad (1p)$$

$$b-1 \mid 2019 \Leftrightarrow b-1 \in \{1, 3, 673, 2019\} \quad (1p)$$

$$ab-1 \geq b-1 \Rightarrow \text{convine doar } b-1 \in \{1, 3\}. \quad (1p)$$

Dacă $b=2$, rezultă $a=1010$.

Dacă $b=4$, rezultă $4a-1=673$, ecuație care nu are soluție naturală. (1p)

Prin urmare, $a=1010$ și $b=2$. (1p)

Subiectul II

Soluție și barem:

a) Presupunând contrariul, avem: $k! + (k+1)! > (k+2)!$ (inegalitatea triunghiului) (1p)

$$\Leftrightarrow k!(1+k+1) > k!(k+1)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow 1 > k+1 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow 0 > k, \text{ contradicție. } (1p)$$

b) Oricare ar fi k număr natural, $k \geq 5$, ultima cifră a lui $k!$ este 0, deoarece produsul $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ îi conține ca factori pe 2 și pe 5. (1p)

Așadar, pentru $n \geq 4$, ultima cifră a sumei $S = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ este 3, deoarece $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$. (1p)

Prin urmare, pentru $n \geq 4$ rezultă că S nu este pătrat perfect, deci a nu este număr natural.

$$\text{Pentru } n=3 \Rightarrow a = \sqrt{1! + 2! + 3!} = \sqrt{1 + 2 + 6} = 3 \in \mathbb{N}.$$

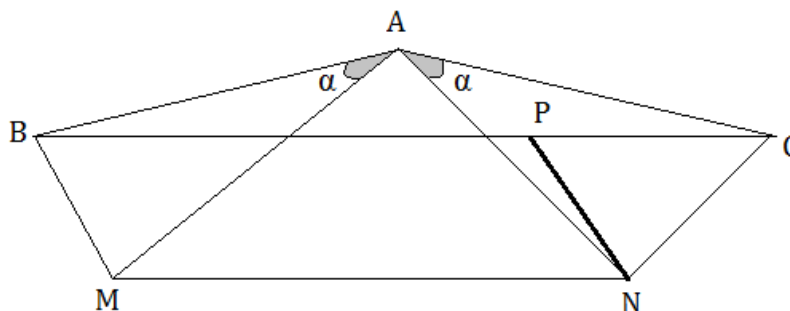
$$\text{Pentru } n=2 \Rightarrow a = \sqrt{1! + 2!} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Pentru } n=1 \Rightarrow a = \sqrt{1!} = 1 \in \mathbb{N}. \quad (1p)$$

$$\text{Așadar } n \in \{1, 3\}. \quad (1p)$$

Subiectul III

Soluție:



Se observă că $m(\angle BAN) + m(\angle MAC) = 240^\circ > 180^\circ$,

deci punctul M este în interiorul $\angle BAN$. (1 p)

$$\text{Așadar } m(\angle BAM) = m(\angle CAN) = m(\angle BAC) - 120^\circ = \alpha$$

În triunghiul isoscel $\triangle ANC$ avem $m(\angle ANC) = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, iar în triunghiul isoscel $\triangle AMN$ avem

$$m(\angle ANM) = \frac{180^0 - (120^0 - \alpha)}{2}. \quad (1p)$$

Însumând cele două relații, obținem $m(\angle CNM) = 120^0$. Analog $m(\angle BMN) = 120^0$. **(1p)**

$\triangle BAM \equiv \triangle CAN$ (LUL), deci $[BM] \equiv [CN]$.

Din $\triangle BMN \equiv \triangle CNM$ (LUL) avem $[BN] \equiv [CM]$, de unde rezultă că $\triangle BMC \equiv \triangle CNB$ (LLL).

Prin urmare $\angle MBC \equiv \angle NCB$, deci, folosind suma măsurilor unghiurilor patrulaterului BMNC, rezultă că $m(\angle MBC) = m(\angle NCB) = 60^0$, BMNC fiind un trapez isoscel. **(1p)**

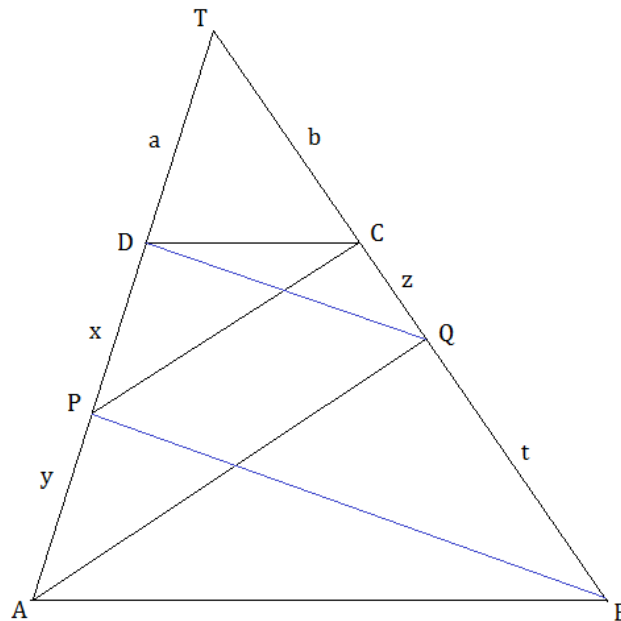
Ducem prin N o paralelă la BM, care intersectează (BC) în punctul P. **(1p)**

Triunghiul $\triangle PNC$ este isoscel ($PN = BM = CN$) cu un unghi de 60^0 , deci este echilateral. **(1p)**

Așadar $BM = PC$ și $MN = BP$, deci $BM + MN = PC + BP = BC$, q.e.d. .

Subiectul IV

Soluție și barem:



a) Notăm, ca în figură, $DT = a$, $DP = x$, $PA = y$, $CT = b$, $CQ = z$, $QB = t$.

$$\text{Avem } \frac{TP}{PA} > \frac{TC}{CQ} \Leftrightarrow \frac{a+x}{y} > \frac{b}{z} \Leftrightarrow az + xz > by \quad (1) \quad (1p)$$

$$\text{Din teorema lui Thales (} CD \parallel AB \text{) avem: } \frac{TD}{DA} = \frac{TC}{CB} \Leftrightarrow \frac{a}{x+y} = \frac{b}{z+t} \Leftrightarrow az + at = bx + by \quad (2) \quad (1p)$$

Din (1) și (2) rezultă : $(az + xz) - (az + at) > by - (bx + by) \quad (1p)$

$$\Leftrightarrow xz - at > -bx \Leftrightarrow xz + bx > at \Leftrightarrow x(b+z) > at \Leftrightarrow \frac{b+z}{t} > \frac{a}{x} \Leftrightarrow \frac{TQ}{QB} > \frac{TD}{PD}. \quad (1p)$$

b) Analog demonstrației de la a) se poate obține că: $\frac{TP}{PA} < \frac{TC}{CQ} \Rightarrow \frac{TQ}{QB} < \frac{TD}{PD}. \quad (1p)$

$$\text{Avem: } \frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} = \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD} \quad (3)$$

Dacă $\frac{TP}{PA} > \frac{TC}{CQ}$ rezultă $\frac{TQ}{QB} > \frac{TD}{PD}$ și însumând relațiile obținem $\frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} > \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD}$, contradicție.

Dacă $\frac{TP}{PA} < \frac{TC}{CQ}$ rezultă $\frac{TQ}{QB} < \frac{TD}{PD}$ și însumând relațiile obținem $\frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} < \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD}$, contradicție. **(1p)**

Prin urmare $\frac{TP}{PA} = \frac{TC}{CQ}$ și din (3) rezultă $\frac{TQ}{QB} = \frac{TD}{PD}$.

Din reciproca teoremei lui Thales rezultă apoi că $PC \parallel AQ$ și $DQ \parallel BP$. **(1p)**