Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=1-2i+1+\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$	**2p**
	$z_1z_2=(1-2i)\left(1+\frac{1}{2}i\right)=1+\frac{1}{2}i-2i-i^2=2-\frac{3}{2}i$, deci $z_1+z_2=z_1z_2$	**3p**
2.	$(f\circ f)(x)=f(f(x))=2(2x+m)+m=4x+3m$, $2f(x-1)=2(2(x-1)+m)=4x-4+2m$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x+3m=4x-4+2m \Leftrightarrow m=-4$	**2p**
3.	$5\cdot 5^x\cdot 2^x=50\cdot 7^{x-1} \Leftrightarrow 5^x\cdot 2^x=10\cdot 7^{x-1} \Leftrightarrow 10^{x-1}=7^{x-1}$	**3p**
	$x-1=0$, deci $x=1$	**2p**
4.	$f(2)$ poate fi aleasă în trei moduri și, pentru fiecare alegere a lui $f(2)$, numerele $f(0)$ și $f(4)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $3\cdot 4\cdot 4=48$ de funcții $f:\{0,2,4\}\to\{3,5,7,9\}$ cu proprietatea $f(2)\le 8$	**2p**
5.	$m_d\cdot m_{AB}=-1$ și, cum $m_{AB}=-1$, obținem $m_d=1$	**2p**
	$AC=BC\Rightarrow d$ este mediatoarea segmentului AB și, cum $M(0,2)$ este mijlocul segmentului AB, obținem că ecuația dreptei d este $y=x+2$	**3p**
6.	$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-x\right)=1$	**2p**
	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{\pi}{6}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}4^x & 0\\ 0 & 9^x\end{vmatrix}=4^x\cdot 9^x-0\cdot 0=$	**3p**
	$=2^{2x}\cdot 3^{2x}=6^{2x}$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot B=\begin{pmatrix}-4^x & 4^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, $B\cdot A(x)=\begin{pmatrix}-4^x & 9^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}-4^x & 4^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4^x & 9^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix} \Leftrightarrow 4^x=9^x$, de unde obținem $x=0$	**2p**
c)	Cum $A(1)\cdot X=X\cdot X\cdot X=X\cdot A(1)$, pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow\begin{pmatrix}4a & 4b\\ 9c & 9d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a & 9b\\ 4c & 9d\end{pmatrix}$, deci $b=0$ și $c=0$	**3p**

	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-2,2\}$ și $d \in \{-3,3\}$, deci orice matrice X cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi	**2p**
2.a)	$2 \circ 1 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 =$	**3p**
	$= 8 + 2 + 2 = 12$	**2p**
b)	$2c^2 + ca + 2a^2 = 2c^2 + cb + 2b^2 \Leftrightarrow c(a-b) + 2\left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c + 2a + 2b) = 0$	**3p**
	Cum $2a + 2b + c \neq 0$, obținem $a - b = 0$, deci $a = b$	**2p**
c)	$2x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 5x^3 + 2 \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$	**2p**
	$x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = 0$ sau $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + a(x+1)' =$	**3p**
	$= \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$f'(x) = \ln x + 2$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e^2}$	**2p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(0, \dfrac{1}{e^2}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0, \dfrac{1}{e^2}\right]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right)$	**3p**
c)	$f''(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci, pentru orice număr real a, funcția f este convexă	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(2x + e^x\right)dx = \left(x^2 + e^x\right)\Big\vert_{-1}^{0} =$	**3p**
	$= 0 + e^0 - 1 - e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$	**2p**
b)	$\int_0^1 x f\left(x^2\right)dx = \int_0^1 \left(2x^3 + xe^{x^2}\right)dx = \int_0^1 2x^3\,dx + \dfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2\right)' e^{x^2}\,dx = \dfrac{x^4}{2}\Big\vert_0^1 + \dfrac{e^{x^2}}{2}\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^1}{2} - \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{e}{2}$	**2p**
c)	$I_{n+1} = \int_0^2 x^{n+1}\left(f(x) - 2x\right)dx = \int_0^2 x^{n+1} e^x\,dx = x^{n+1}e^x\Big\vert_0^2 - (n+1)\int_0^2 x^n e^x\,dx =$	**3p**
	$= 2^{n+1}e^2 - (n+1)I_n$, deci $I_{n+1} + (n+1)I_{n-1} = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**