

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 10**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că, dacă  $z_1 = 1 - 2i$  și  $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$ , unde  $i^2 = -1$ , atunci  $z_1 + z_2 = z_1 z_2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , astfel încât  $(f \circ f)(x) = 2f(x - 1)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$ .
- 5p** 4. Determinați numărul funcțiilor  $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$  cu proprietatea  $f(2) \leq 8$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(-2, 4)$ ,  $B(2, 0)$  și  $C$  astfel încât  $AC = BC$ . Determinați ecuația dreptei  $d$ , care trece prin punctul  $C$  și este perpendiculară pe dreapta  $AB$ .
- 5p** 6. Determinați  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  pentru care  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x + 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real și  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(x)) = 6^{2x}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$ .
- 5p** c) Demonstrați că orice matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $X \cdot X = A(1)$  are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $2 \circ 1 = 12$ .
- 5p** b) Se consideră numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $2a + 2b + c \neq 0$ . Știind că  $c \circ a = c \circ b$ , demonstrați că  $a = b$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (x + 1) = 5x^3 + 2$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x + a(x + 1)$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \ln x + 1 + a$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 1$ , determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , funcția  $f$  este convexă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + e^x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{e}$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 x f(x^2) dx$ .
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^2 x^n (f(x) - 2x) dx$ . Demonstrați că  $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .