

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 12**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați termenul  $b_8$  al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_5 = 3$  și  $b_6 = 6$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x - 3$ . Arătați că  $(f \circ f)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2 \lg x = \lg(5x + 6)$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0, 3)$ ,  $B(-1, -2)$  și  $C(a, -2)$ , unde  $a$  este număr real nenul,  $a \neq -1$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care ortocentrul triunghiului  $ABC$  este  $O$ .
- 5p** 6. În triunghiul  $ABC$ ,  $AB = 6$ ,  $AC = 3\sqrt{6}$  și  $B = \frac{\pi}{3}$ . Determinați măsura unghiului  $C$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(\sqrt{2})) = 3$ .
- 5p** b) Arătați că matricea  $A(a)$  este inversabilă, pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Determinați numărul întreg  $k$  pentru care  $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = kA(1)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$ .
- 5p** a) Arătați că numărul  $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$  este întreg.
- 5p** b) Arătați că  $x \circ x \geq \frac{2}{3}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x \circ x \circ x = e$ , unde  $e$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Arătați că graficul funcției  $f$  nu admite asimptotă spre  $+\infty$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ .
2. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^4 f^4(x) dx = 21$ .

- 5p**   **b)** Calculați  $\int_0^1 f(e^x) dx$ .
- 5p**   **c)** Arătați că  $\int_1^4 e^{f(x)} dx = 2e^2$ .