INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN HUNEDOARA

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 10 februarie 2023

Clasa a VII-a - Barem

1. **i)** Inegalitatea este echivalentă $n(n+1)^2 > n^2(n+1)$ adică $n+1 > n$, 2p

ii) Egalitatea este echivalentă cu $1 = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \Leftrightarrow 1 = n + 1 - n$ 2p

iii) Din ii) avem $\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 1p

Dacă notăm cu S membrul stâng al egalității, vom avea:

$S = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}(\sqrt{2}+\sqrt{1})} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2023}\sqrt{2022}(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})} =$ 1p

$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2022}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2023}}$ 1p

2. **i)** Fie $k=[x]$, atunci $k \leq x < k+1$, *de unde* $k + y \leq x + y < k + y + 1$ 2p

$[x+y] = k + y = [x]+y$

ii) Dacă x verifică ecuația, atunci $x \in \mathbb{Z}$, conform cu i), ecuația devine $x + \left[-\frac{3}{2}\right] + x + \left[\frac{3}{2}\right] = x +$ $+ 1$, de unde x=2. Se verifică 2 este soluție 2p

iii) Din $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$ egalitatea ne conduce la $\left[[x] + \{x\} + [y] + \{y\}\right] = [x] + [y] +$ $+ \{y\}$ și folosind i), obținem $[\{x\} + \{y\}] = \{y\}$, adică $\{y\} \in \mathbb{Z} \cap [0,1)$

Adică $\{y\} = 0$, de unde $y \in \mathbb{Z}$. 3p

3. **i)** $\widehat{BMC} = 120^o$ de unde $\widehat{BMN} = 60^o$ 3p

ii) ΔBMN echilateral, avem BN=BM, de unde $\widehat{ABM} = \widehat{CBN}$. 1p

ΔABM=ΔCBN, adică AM=CN=MC+BM 2p

4. **i)** Fie T∈(CD a.î. D∈(CT) și TD=BE 1p

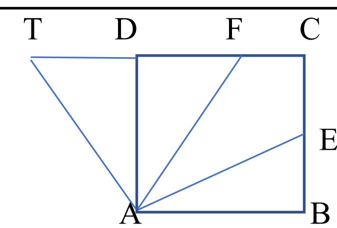
Avem ΔABE=ΔADT, de unde $\widehat{ATD} = \widehat{AEB}$ și $\widehat{TAD} = \widehat{BAE}$ 2p

Atunci $\widehat{TAF} = \widehat{TAD} + \widehat{FAD} = \widehat{FAD} + \widehat{FAE} = \widehat{DAE} = \widehat{AEB}$ 1p

și atunci $\widehat{ATD} = \widehat{TAF}$, de unde TF=AF, adică AF=BE+DF 2p

ii) Se face aceiași construcție ca la punctul anterior i).

Atunci ΔAFT este triunghi isoscel și $\widehat{TFA} = 2\widehat{BAE}$ obținem $\widehat{ATD} = 90^o - \widehat{BAE} = \widehat{DEA}$ și TD=BE avem ΔABE = ΔADT (C.U.) adică AD=AB, ceea ce implică ABCD pătrat. 2p



NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează similar baremului