

Olimpiada de matematică Etapă locală - 10 februarie 2023

Clasa a VIII-a - Barem

1. a) Fie d un divizor comun al numerelor.
 $d/2n+3 \Rightarrow d/3(2n+3)=6n+9$ (1p)
 $d/3n+4 \Rightarrow d/2(3n+4)=6n+8$ (1p)
 Rezultă că $d/(6n+9)-(6n+8)=1$, deci $2n+3$ și $3n+4$ sunt prime între ele. (1p)

b) Avem $6n^2+17n+12=6n^2+8n+9n+12=2n(3n+4)+3(3n+4)=(2n+3)(3n+4)$ (1p)
 Presupunând că fracția este reductibilă, rezultă că există un număr natural prim p care divide atât numărătorul, cât și numitorul fracției.
 Cum p este prim, dacă $p/(2n+3)(3n+4)$, rezultă că $p/2n+3$ sau $p/3n+4$ (1p)

Cazul 1) $p/2n+3$
 Cum $p/5n+7 \Rightarrow p/(5n+7)-(2n+3)$, deci $p/3n+4$, contradicție cu faptul că $2n+3$ și $3n+4$ sunt prime între ele. (1p)

Cazul 2) $p/3n+4$
 Cum $p/5n+7 \Rightarrow p/(5n+7)-(3n+4)$, deci $p/2n+3$, contradicție cu faptul că $2n+3$ și $3n+4$ sunt prime între ele.
 Așadar fracția este ireductibilă. (1p)

2. a) a) **Metoda 1**
 Inegalitatea este echivalentă cu: $xy(x+y) \leq (x+y)(x^2-xy+y^2)$ (1p)
 $\Leftrightarrow xy \leq x^2-xy+y^2 \Leftrightarrow 2xy \leq x^2+y^2$, relație adevărată, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, așadar
 $x^2y + xy^2 \leq x^3 + y^3, \quad \forall x, y \in (0, \infty)$ (2p)

Metoda a 2-a
 Inegalitatea este echivalentă cu: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-y) + y^2(y-x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x-y)(x^2-y^2) \geq 0$ (2p)
 $\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$, relație adevărată, $\forall x, y \in (0, \infty)$, așadar $x^2y + xy^2 \leq x^3 + y^3$,
 $\forall x, y \in (0, \infty)$ (1p)

b) Folosind a), însumăm inegalitățile:
 $x^2y + xy^2 \leq x^3 + y^3$
 $y^2z + yz^2 \leq y^3 + z^3$
 $z^2x + zx^2 \leq z^3 + x^3$, obținând
 $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \leq 2(x^3 + y^3 + z^3)$ (2p)
 Din condiția $x+y+z=1$ obținem $y+z=1-x$ și analogele. (1p)
 Înlocuind în inegalitatea de mai sus, obținem
 $x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z) \leq 2(x^3 + y^3 + z^3)$, de unde rezultă că
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3(x^3 + y^3 + z^3)$. (1p)

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

Fie $OD \perp BC$, $D \in BC$. Din teorema celor trei perpendiculare, rezultă $AD \perp BC$. **(1p)**

$$\text{Avem } S = \frac{1}{2} BC \cdot AD \quad (1)$$

Din teorema lui Pitagora și formula înălțimii în triunghiul dreptunghic obținem:

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$3. \quad a) \quad AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{y^2 z^2}{y^2 + z^2} + x^2} = \sqrt{\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{y^2 + z^2}}$$

Înlocuind BC și AD în relația (1) obținem:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{y^2 + z^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}$$

$$S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{x \cdot y}{2} \quad S_{AOC} = \frac{AO \cdot OC}{2} = \frac{x \cdot z}{2} \quad S_{COB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{z \cdot y}{2}$$

$$S^2 = S_{AOB}^2 + S_{AOC}^2 + S_{BOC}^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{4} = \frac{y^2 z^2}{4} + \frac{x^2 z^2}{4} + \frac{y^2 x^2}{4}$$

1p

- b) Fie $OM \perp AD$, $M \in AD$, avem $OM \perp BC$, deoarece $BC \perp (AOD)$.
Fie $ON \perp AC$, $N \in AC$ rezultă $BN \perp AC$, $(BON) \perp (ABC)$ și $(AOD) \perp (ABC)$
 BN și AD înălțimi în triunghiul ABC .
 $(BON) \cap (AOD) = OM$

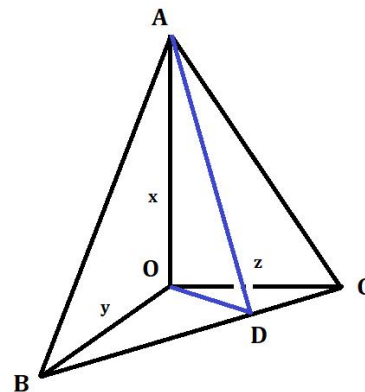
1p

1p

1p

1p

1p



Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$.

Cum $AB \perp CD$ și $AB \perp CE$, rezultă $AB \perp (CED)$, deci $AB \perp DE$. **(2p)**

Notăm $AE = x$, $BE = y$, $CE = z$, $DE = t$.

Aplicând teorema lui Pitagora, obținem:

$$AC + AD = \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + t^2} \quad \text{și}$$

$$BC + BD = \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + t^2}.$$

(1p)

4. Dacă $x < y$, rezultă că $AC + AD < BC + BD$, contradicție cu ipoteza.

Dacă $x > y$, rezultă că $AC + AD > BC + BD$, contradicție cu ipoteza.

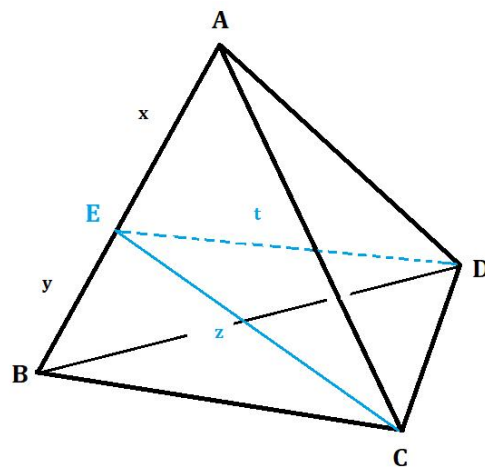
(2p)

Prin urmare, $x = y$, deci $AE = BE$.

Cum $E \in AB$, rezultă că E este mijlocul segmentului $[AB]$.

În triunghiul $\triangle CAB$, înălțimea $[CE]$ este și mediană, deci triunghiul este isoscel, cu $AC = BC$.

Analog (sau din egalitatea din enunț) rezultă că $AD = BD$. **(2p)**



- **NOTĂ** Orice soluție corectă se punctează similar baremului