Clasa a IX-a

Soluţii

1. Notăm cu x valoarea raportului AB/BC=AE/EC (teorema bisectoarei, 1 punct) şi cu y valoarea raportului AP/PD. Trebuie să demonstrăm că $x = 1/4 \Leftrightarrow y = 1/2$ (2 puncte).

$$\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}}{1+x} = \frac{1}{1+x}\overrightarrow{BA} + \frac{x}{1+x}\overrightarrow{BC} \text{ (1 punct)}$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}}{1+y} = \frac{1}{1+y}\overrightarrow{BA} + \frac{y}{2(1+y)}\overrightarrow{BC} \text{ (1 punct)}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{BP}$ sunt colineari, rezultă

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+y}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{y}{2(1+y)}} \text{(2 puncte)}$$

adică $y = 2x$ (1 punct). Rezultă echivalenţa cerută (1 punct).

2. Fie $x_1,\ x_2$ două soluţii distincte ale ecuaţiei. Putem presupune că $x_1 < x_2$, de unde rezultă $[x_1] \leq [x_2]$ (1 punct). Dacă $[x_1] = [x_2]$, din $2[x_1] - 3\{x_1\} = a = 2[x_2] - 3\{x_2\}$ rezultă $\{x_1\} = \{x_2\}$ şi deci $x_1 = x_2$, absurd. Astfel, $[x_1] < [x_2]$ (2 puncte). Se obţin relaţiile

$$3 > 3(\{x_2\} - \{x_1\}) = 2([x_2] - [x_1]) \geq 2$$

de unde rezultă $[x_2] - [x_1] = 1$ (2 puncte) şi $\{x_2\} - \{x_1\} = 2/3$ (2 puncte).
În concluzie, $x_2 = [x_2] + \{x_2\} = [x_1] + 1 + \{x_1\} + 2/3 = x_1 + 5/3$ (2 puncte).

3. a) Din enunţ rezultă $x_{n+1} < 2x_n - \sqrt{3}|x_n| \leq (2-\sqrt{3})x_n < x_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ (2 puncte).
b) Relaţia de recurenţa conduce la

$$x_n = 2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2 + 25} \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Conform cu a), doar soluţia cu "+" convine (2 puncte). Adunând această egalitate cu

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - \sqrt{3x_{n+1}^2 + 25}$$

se obţine $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ (1 punct).
c) $x_0 = 0,\ x_1 = 5$ satisfac condiţiile. Din b) rezultă că dacă x_n şi x_{n+1} sunt întregi divizibili cu 5, atunci x_{n+2} satisface aceleaşi condiţii. O inducţie "cu dublă ipoteză" încheie demonstraţia (2 puncte).
d) x_0 este par, iar x_1 impar. Din b) rezultă că x_n şi x_{n+2} au aceeaşi paritate. O inducţie "cu salt" încheie demonstraţia (2 puncte).

4. Putem presupune că z este cel mai mic dintre cele 3 unghiuri. Atunci

$$(\sin y - \sin z)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos z}\right) \geq 0$$

de unde obţinem

$$\frac{\sin y}{\cos x} + \frac{\sin z}{\cos z} \geq \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x} \quad (*) \qquad \text{(3 puncte)}$$

Utilizând monotonia funcţiilor trigonometrice în primul cadran, obţinem

$$(\sin x - \sin y)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos y}\right) \geq 0$$

ceea ce se mai scrie

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos x} \quad (**) \qquad \text{(3 puncte)}$$

Adunând membru cu membru inegalităţile $(*)$ şi $(**)$ rezultă concluzia (3 puncte).