Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a XI-a

1. Determinaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) - f(y) \in \mathbb{Q}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x - y \in \mathbb{Q}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $A \in \mathcal{M}_{2n\times n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n\times 2n}(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietatea că $AB = C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,2n}}$ are elementele date de

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j; \\ -1 & \text{dacă } |i-j| = n; \\ 0 & \text{dacă } i \not\equiv j (\text{mod } n). \end{cases}$$

Determinaţi produsul BA.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matrice cu proprietatea că $A \cdot {}^tB$ şi $C \cdot {}^tD$ sunt matrice simetrice, iar $A \cdot {}^tD - B \cdot {}^tC = I_n$. Arătaţi că ${}^tA \cdot D - {}^tC \cdot B = I_n$.

4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri definite prin $x_1 = \frac{7}{25}$, $y_1 = \frac{24}{25}$ şi

$$x_{n+1} = x_n cos(y_n) - y_n sin(y_n), \quad y_{n+1} = x_n sin(y_n) + y_n cos(y_n), \quad (\forall) n \geq 1.$$

Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi determinaţi limitele lor.

Notă: Timp de lucru - 3 ore