Concursul interjudeţean de matematică
”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XI-a

1.

start	$1\,p$
pentru $r \in \mathbb{Q}$ consideră funcţia $g_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_r(x) = f(x+r) - f(x)$	$1\,p$
g_r este continuă cu $Im(g_r) \subseteq \mathbb{Q}$	$1\,p$
deci g_r este constantă $\overset{not}{\equiv} c_r \in \mathbb{Q}$	$1\,p$
consideră $a = c_1 = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$ şi observă că $a \in \mathbb{Q}$,$b \in \mathbb{R}$	$1\,p$
arată că $c_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot c_1 = \frac{a}{n}$	$2\,p$
deduce că $c_r = a \cdot r$, $(\forall) r \in \mathbb{Q}$	$1\,p$
deci $f(r) = ar + b$, $(\forall) r \in \mathbb{Q}$	$1\,p$
din continuitate obţine că $f(x) = ax + b$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}$	$1\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
scrie $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $B = [B_1 \ B_2]$, cu $A_i, B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	$2\,p$
şi $AB = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$	$2\,p$
obţinecă $A_2 = -A_1$, $B_2 = -B_1$, $B_1 = A_1^{-1}$	$2\,p$
deduce că $BA = 2 \cdot I_n$	$3\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
scrie $A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA$, $C \cdot {}^tD = D \cdot {}^tC$	$1\,p$
obţine $D \cdot {}^tA - C \cdot {}^tB = I_n$	$2\,p$
arată că $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$	$3\,p$
deduce că $\begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = I_{2n}$	$2\,p$
din blocul $(1,1)$ trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
observă că $x_1 = cos(\alpha_1), y_1 = sin(\alpha_1)$, cu $\alpha_1 = \arcsin \frac{24}{25}$	$1\,p$
arată prin inducţie că $x_n = cos(\alpha_n), y_n = sin(\alpha_n)$	$2\,p$
şi $\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n)$	$1\,p$
arată prin inducţie că $\alpha_n \nearrow$, $\alpha \in (0, \pi)$, $(\forall) n \geq 1$	$2\,p$
$(\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n) > \alpha_n > 0$,	
$\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n) = \alpha_n + sin(\pi - \alpha_n) < \alpha_n + \pi - \alpha_n = \pi$)	
deduce că (α_n) este convergent	$1\,p$
cu $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = \pi$	$1\,p$
deduce că (x_n) şi (y_n) sunt convergente cu $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = -1$ şi $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0$	$1\,p$
Total	**10 p**