Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a X-a - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Start ... 1p
Afirma ca functia f este si surjectiva (bijectiva) ... 2p
Obtine $f(x) = x \pm c$ pentru orice $x \in A$ (c fixat) ... 2p
Scrie $\sum\limits_{x\in A} f(x) = \sum\limits_{x\in A} x + c \cdot \sum\limits_{x\in A} \pm 1 = \sum\limits_{x\in A} x$ ... 3p
Din imparitatea numarului de elemente ale lui A deduce $c = 0$; concluzioneaza ca raspunsul la problema este functia identitate ... 2p
Problema 2. Start ... 1p
Demonstreaza surjectivitatea lui sh si respectiv ch ... 1p+1p=2p
Demonstreaza injectivitatea (bijectivitatea) lui sh si obtine inversa ... 0.5p
Demonstreaza cele trei egalitati de la punctul b) ... 0.5p+0.5p+0.5p=1.5p
Logaritmeaza ipoteza din c) si scrie sub forma $sh^{-1}(x) + sh^{-1}(y) = sh^{-1}(z)$ ... 1p
Aplica egalitatii de mai sus functia sh (si/sau ch) si obtine cele doua egalitati din concluzie ... 1p
Obtine egalitatile similare $-y\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+y^2} = x$, $-x\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2} = y$ ... 2p
Elimina $\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+y^2}, \sqrt{1+z^2}$ din egalitatile corespunzatoare si obtine a treia egalitate de la c) ... 1p
(Daca demonstreaza altfel/direct se acorda cele 5p)
Problema 3. Start ... 1p
Deduce ca punctele $A_1\left(\frac{1}{|a|}\cdot a\right), B_1\left(\frac{1}{|b|}\cdot b\right), C_1\left(\frac{1}{|c|}\cdot c\right)$ sunt pe cercul unitate si ca centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ este in originea O ... 1p+1p=2p
Deduce ca triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral si de aici ca unghiurile $\angle A_1OB_1$ etc. au masurile egale cu $120°$ ... 1p+1p=2p
Aplica teorema cosinusului in triunghiurile OBC, OCA si respectiv OAB (unde s-a notat $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$) si obtine egalitatile $|b-c|^2 = |b|^2 + |c|^2 + |b|\cdot|c|$ etc. ... 1p
Din identitatea paralelogramului si cele de mai sus obtine egalitatile $|b+c|^2 = |b|^2+|c|^2-|b|\cdot|c|$ si analoagele ... 2p
Din inegalitatea mediilor deduce inegalitatile $|b+c|^2 \geq |b|\cdot|c|$ etc. ... 1p
Obtine prin inmultirea acestora inegalitatea din enunt ... 1p
Problema 4. Start ... 1p
Observa ca 2011 este numar prim; aplica teorema lui Wilson si deduce ca $2010! + 1$ se divide cu 2011 ... 1p+1p=2p
Presupune ca ar exista o descompunere ca in enunt si arata ca niciunul din cele 2010 numere nu se divide cu 2011; arata ca acestea dau resturile $\{1, 2, \ldots, 2010\}$ la impartirea cu 2011 ... 2p
Obtine in termeni de clase de congruenta o egalitate de forma $\prod\limits_{r\in A'} r = \prod\limits_{r\in B'} r$ (modulo 2011) ... 1p
Obtine echivalent $\left(\prod\limits_{r\in A'} r\right)^{2010} = \left(\prod\limits_{r\in\{1,2,\ldots,2010\}} r\right)^{1005}$ (modulo 2011) ... 1p

Din teorema lui Fermat deduce ca membrul stang da restul 1 la impartirea cu 2011 ... 1p
Din teorema lui Wilson si binomul lui Newton deduce ca membrul drept da restul -1 la impartirea cu 2011 ... 1p
Observa contradictia si trage concluzia ... 1p