Universitatea de Vest din Timişoara **Inspectoratul Şcolar Judeţean**
Facultatea de Matematică şi Informatică **Caraş-Severin**

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a X-a

1. Fie A o mulţime de numere reale cu 2011 elemente. Determinaţi funcţiile injective $f : A \to A$ care au proprietatea că

$$|f(x) - x| = |f(y) - y|$$

pentru orice $x, y \in A$.
2. a) Arătaţi că funcţiile (”sinus hiperbolic” şi respectiv ”cosinus hiperbolic”)

$$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ sh(t) \stackrel{def}{=} \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \quad ch : \mathbb{R} \to [1, \infty),\ ch(t) \stackrel{def}{=} \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

sunt surjective; arătaţi că funcţia sh este bijectivă şi să se determine inversa acesteia.
b) Arătaţi că au loc următoarele egalităţi:

$$ch^2(t) - sh^2(t) = 1; \quad ch(t_1 + t_2) = ch(t_1)ch(t_2) + sh(t_1)sh(t_2);$$
$$sh(t_1 + t_2) = sh(t_1)ch(t_2) + ch(t_1)sh(t_2)$$

pentru orice $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
c) Arătaţi că dacă numerele reale x, y, z verifică egalitatea

$$(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = z + \sqrt{1 + z^2},$$

atunci au loc egalităţile

$$x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} = z; \quad xy + \sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + z^2};$$
$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 4x^2y^2z^2.$$

3. Fie a, b, c numere complexe distincte astfel încât $|bc|a + |ca|b + |ab|c = 0$. Arătaţi că are loc inegalitatea $|(b + c)(c + a)(a + b)| \geq |abc|$.
4. a) Arătaţi că numărul $2010! + 1$ este divizibil cu 2011.
b) Arătaţi că o mulţime de 2010 numere naturale consecutive nu se poate descompune în două submulţimi nevide şi disjuncte A şi B astfel încât produsul numerelor din mulţimea A să fie egal cu produsul numerelor din mulţimea B.

Notă. Timp de lucru - 3 ore.