Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,

Reşiţa, 25-27 martie 2011

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că nu există nici un număr natural care să se mărească de 2, 5, 6 sau 8 ori prin mutarea primei cifre la sfârşitul numărului.

2. **a)** Determinaţi numerele strict pozitive a şi b astfel încât
$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2},$$
pentru un număr natural $n \geq 2$ fixat.

   b) Dacă a, b şi c sunt numere naturale avându-l pe 1 drept cel mai mare divizor comun şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, arătaţi că $a + b$, $a - c$ şi $b - c$ sunt pătrate perfecte.

3. Fie $\widehat{POQ}$ un unghi ascuţit şi $B \in (OQ$. Construim din B o perpendiculară pe OP care intersectează această dreaptă în A. Punctul C este ales astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral, iar O şi C să nu fie de aceeaşi parte a dreptei AB. Fie D simetricul lui C faţă de OP şi $M \in (OQ$ astfel încât $[OC] \equiv [OM]$. Ştiind că $m(\widehat{POC}) = \frac{1}{3} m(\widehat{POQ})$,

   a) arătaţi că $[AD] \equiv [CM]$;

   b) calculaţi $m(\widehat{POQ})$.

4. Un gardian deschide pe rând toate celulele unei închisori, care sunt aşezate în linie dreaptă. Apoi, el închide celulele cu numarul 2, 4, 6 ş. a. m. d. După aceea, luând celulele din 3 în 3, răsuceşte cheia în broasca acestor celule, închizându-le pe cele deschise şi deschizându-le pe cele închise. El continuă în acest fel, la pasul i luând celulele i, $2i$, $3i$, ..., şi răsucind cheia în broasca lor. Deţinutii ale căror celule au rămas deschise după efectuarea tuturor operaţiilor posibile de acest fel sunt puşi în libertate.

   Să se arate că deţinuţii eliberaţi vor fi cei din celulele având numărul de ordine un pătrat perfect. (Fiecare operaţie începe din dreptul primei celule.)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.*