Concursul interjudeţean de matematică
”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a

1.

start	$1\,p$
face schimbarea de variabilă $y = 2036 - x$	$2\,p$
şi obţine că $I = \int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{x+263})}{arctg(\sqrt{x+263})+arctg(\sqrt{2299-x})}dx = \int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{2299-x})}{arctg(\sqrt{x+263})+arctg(\sqrt{2299-x})}dx$	$3\,p$
obţine că $2I = \int_{25}^{2011} 1\,dx = 1986$	$2\,p$
deci $I = 993$	$2\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
$\{a^n \vert n \in \mathbb{N}^*\}$ finită $\Longrightarrow (\exists) m, n \in \mathbb{N}^*, m > n : a^m = a^n$	$2\,p$
din $a^m \cdot x = a^n \cdot x$ deduce că $a^{m-n} \cdot x = x, (\forall) x \in G$	$1\,p$
analog $x \cdot a^{m-n} = x, (\forall) x \in G$	$1\,p$
deci $a^{m-n} \overset{not}{=} u_a$ este element unitate	$1\,p$
arată că $u_a = u_b$, $(\forall) a, b \in G$	$2\,p$
pentru orice $a \in G$ deduce că a^{m-n-1} este invers pentru a	$1\,p$
trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
a) pentru $S = \{(x, y) \in \mathbb{K} \vert x^2 + y^2 = 1\}$ şi $A = \{(1, 0)\} \cup \left\{ \left(\frac{r^2-1}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2} \right) \vert r \in \mathbb{K} \right\}$	
arată că $1^2 + 0^2 = 1 = \left(\frac{r^2-1}{1+r^2}\right)^2 + \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2$, deci $A \subseteq S$	$2\,p$
pentru $x = 1$ rezultă $y = 0$	$1\,p$
pentru $x \neq 1$ consideră $r = \frac{y}{1-x}$ şi obţine că $r^2(1 - x) = 1 + x$	$1\,p$
deduce că $x = \frac{r^2-1}{1+r^2}$ şi $y = \frac{2r}{1+r^2}$	$1\,p$
deduce că $S \subseteq A$	$1\,p$
b) scrie ecuaţia sub forma $(x + y)^2 = 1$	$1\,p$
deduce că $x + y = 1$	$1\,p$
obţine că $S = \{(r, r + 1) \vert r \in \mathbb{K}\}$	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
a) calculează $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$	$1\,p$
obţine relaţia de recurenţă $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$	$2\,p$
deduce că $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$	$1\,p$
şi $I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$	$1\,p$
b) arată că $I_{2n} > I_{2n+1} > I_{2n+2}$	$1\,p$
obţine inegalităţile $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$	$1\,p$
şi $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$	$1\,p$
trece la limită şi obţine concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**