

Concursul interjudețean de matematică
”Traian Lalescu”, Ediția a XXV-a,
Reșița, 25-27 martie 2011
 Barem de corectare a soluțiilor la clasa a VII-a

1.	
start	1 p
notează $\sqrt{26} + \sqrt{3} + \sqrt{2011} = r$ și presupune $r \in \mathbb{Q}$	1 p
scrie $r - \sqrt{2011} = \sqrt{26} + \sqrt{3}$	2 p
ridică la pătrat și obține că $r\sqrt{2011} + \sqrt{78} = \frac{r^2+1982}{2} \in \mathbb{Q}$	3 p
ridică la pătrat și obține că $2r\sqrt{78 \cdot 2011} \in \mathbb{Q}$	1 p
deduce că $\sqrt{26 \cdot 3 \cdot 2011} \in \mathbb{Q}$, contradicție	1 p
obține că $\sqrt{26} + \sqrt{3} + \sqrt{2011} \notin \mathbb{Q}$	1 p
Total	10 p
2.	
start	1 p
duce $AA_1 \perp BC$, $II_1 \perp BC$, cu $A_1, I_1 \in (BC)$	1 p
arată că $\triangle AA_1R \sim \triangle II_1R$	1 p
deduce că $\frac{AR}{IR} = \frac{AA_1}{II_1}$ (1)	1 p
folosind $AA_1 \parallel II_1$ deduce că $\triangle AA_1P \sim \triangle II_1P$, unde $P \in (BC) \cap AI$	1 p
obține că $\frac{AA_1}{II_1} = \frac{AP}{IP}$ (2)	1 p
cu teorema bisectoarei în $\triangle ABC$ obține $\frac{AB}{BP} = \frac{AB+AC}{BC}$ (3)	1 p
cu teorema bisectoarei în $\triangle ABP$ obține $\frac{AB}{BP} = \frac{AB+BP}{BP}$ (4)	1 p
din (1) – (4) obține concluzia	2 p
Total	10 p
3.	
start	1 p
a) arată că $a^2 \in 4\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} + 1$, $(\forall)a \in \mathbb{Z}$	1 p
deduce că $x^2 + y^2 \in \mathbb{Z} \setminus (4\mathbb{Z} + 3)$	1 p
arată că $2011 \in 4\mathbb{Z} + 3$ și trage concluzia	1 p
b) pentru ecuația $x^2 + 2011^2 = y^2$ observă că	
(x, y) – soluție $\implies (\pm x, \pm y)$ – soluții	0, 5 p
pentru $(x, y) \in \mathbb{N}$ transcrie $(y - x)(y + x) = 2011^2$	0, 5 p
obține că $(y - x, y + x) \in \{(1, 2011^2), (2011, 2011)\}$	0, 5 p
deduce că $(x, y) \in \left\{\left(\pm \frac{2011^2-1}{2}, \pm \frac{2011^2+1}{2}\right), (0, \pm 2011)\right\}$	1 p
pentru $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}$ transcrie echivalent	
$xy = 2011(x + y)$, $x, y \neq 0 \iff (x - 2011)(y - 2011) = 2011^2$	1 p
obține că $(x - 2011, y - 2011) \in \{\pm(1, 2011^2), \pm(2011, 1), (2011, 2011)\}$	0, 5 p
deduce că $(x, y) \in \{(2012, 2011 \cdot 2012), (2010, -2010 \cdot 2011),$ $(2011 \cdot 2012, 2012), (-2010 \cdot 2011, 2010), (4022, 4022)\}$	1 p
trage concluzia: prima ecuație are 6 soluții > 5 soluții pentru a doua ecuație	1 p
Total	10 p
4.	
start	1 p
observă că $s_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $(\forall)i = \overline{1, n}$	1 p
caz 1 $(\exists)i_0 : s_{i_0} = 0 \implies s_i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $(\forall)i = \overline{1, n}$	3 p
aplică principiul lui Dirichlet și trage concluzia	1 p
caz 2 $s_i \neq 0$, $(\forall)i = \overline{1, n} \implies s_i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $(\forall)i = \overline{1, n}$	3 p
aplică principiul lui Dirichlet și trage concluzia	1 p
Total	10 p