

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a XII-a — Soluții și barem orientativ

Problema 1. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive, distincte două câte două. Să se calculeze

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx.$$

Soluție. Din

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx &= \frac{1}{b^2 - a^2} \int_0^t \left(\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} - \frac{1}{b} \arctan \frac{t}{b} \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{ab(a + b)} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

..... **4 puncte**

rezultă că

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx &= \\ \frac{1}{c^2 - a^2} \left(\int_0^t \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx - \int_0^t \frac{1}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx \right) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \\ \frac{1}{c^2 - a^2} \left(\frac{1}{ab(a + b)} - \frac{1}{bc(b + c)} \right) \frac{\pi}{2} &= \frac{a + b + c}{abc(a + b)(b + c)(c + a)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

..... **3 puncte**

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu 9 elemente. Să se arate că următoarele două afirmații sunt echivalente:

- (a) Pentru orice $x \in A \setminus \{0\}$ există $a \in \{-1, 0, 1\}$ și $b \in \{-1, 1\}$, astfel încât $x^2 + ax + b = 0$.
- (b) $(A, +, \cdot)$ este corp.

Soluție. Arătăm că prima afirmație o implică pe a doua. Fie $x \in A \setminus \{0\}$ și a, b cu proprietatea din enunț. Întrucât $ax = xa$, rezultă că $x(x + a) = (x + a)x = -b \in \{-1, 1\}$, deci x este inversabil și prin urmare A este corp.

..... **3 puncte**

Arătăm că a doua afirmație o implică pe prima. Întrucât A nu are divizori ai lui zero și $(1 + 1 + 1)(1 + 1 + 1) = 0$, rezultă că $1 + 1 + 1 = 0$.

..... **1 punct**

Fie $x \in A \setminus \{0\}$. Dacă $x^2 = \pm 1$, atunci $x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 + 1 = 0$, deci x are proprietatea din enunț.

..... **1 punct**

Dacă $x^2 \neq \pm 1$, ținând cont de faptul că (A^*, \cdot) este grup cu opt elemente, rezultă că $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1 = 0$, deci $x^4 + 1 = 0$. Întrucât $x^4 + 1 = x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$, rezultă că $x^2 + x - 1 = 0$ sau $x^2 - x - 1 = 0$.

..... **2 puncte**

Problema 3. Fie G un grup finit cu n elemente și e elementul său neutru. Să se determine toate funcțiile $f : G \rightarrow \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc simultan următoarele două condiții:

- (a) $f(x) = 1$ dacă și numai dacă $x = e$; și
- (b) $f(x^k) = f(x)/(f(x), k)$, pentru orice divizor natural k al lui n , unde (r, s) este cel mai mare divizor comun al numerelor naturale r și s .

Soluție. Fie x un element al lui G și ord x ordinul său. Întrucât ord x divide pe n , rezultă că $1 = f(e) = f(x^{\text{ord } x}) = f(x)/(f(x), \text{ord } x)$, deci $f(x)$ este un divizor al lui ord x .

..... **2 puncte**

Deci $f(x)$ divide pe n , de unde $f(x^{f(x)}) = f(x)/(f(x), f(x)) = 1$ și prin urmare $x^{f(x)} = e$. Rezultă că ord x este un divizor al lui $f(x)$, deci $f(x) = \text{ord } x$.

..... **2 puncte**

Reciproc, arătăm că funcția $f : G \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(x) = \text{ord } x$, îndeplinește condițiile din enunț. Fie x un element al lui G , $m = \text{ord } x$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p = \text{ord } x^k$ și $d = (m, k)$. Întrucât $(x^k)^{m/d} = (x^m)^{k/d} = e$, rezultă că p divide pe m/d .

..... **1 punct**

Pe de altă parte, $x^{kp} = (x^k)^p = e$, deci m divide pe kp și prin urmare m/d divide pe $(k/d)p$. Numerele m/d și k/d fiind coprime, rezultă că m/d este un divizor al lui p , deci $p = m/d$.

..... **2 puncte**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1) = 0$ și $|f'(x)| \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Să se arate că

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| < 1/4.$$

Soluție. Fie $t \in (0, 1)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[0, t]$ și $[t, 1]$, rezultă că $|f(t)/t| \leq 1$ și $|f(t)/(1-t)| \leq 1$, deci $|f(t)| \leq \min(t, 1-t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$.

..... **3 puncte**

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt \right| &\leq \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^{1/2} |f(t)| dt + \int_{1/2}^1 |f(t)| dt \\ &\leq \int_0^{1/2} t dt + \int_{1/2}^1 (1-t) dt = 1/4. \quad (*) \end{aligned}$$

..... **3 puncte**

Egalitatea în (*) ar forța $|f(t)| = t$, pentru $0 \leq t \leq 1/2$, și $|f(t)| = 1-t$ pentru $1/2 \leq t \leq 1$. Cum $f(1/2) = \pm 1/2$ și f este derivabilă în $1/2$, rezultă f derivabilă în $1/2$; contradicție. **1 punct**