

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012
CLASA a IX-a – Soluții și barem orientativ

Problema 1. Rezolvați în mulțimea \mathbb{R} ecuația $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

Soluție. Observăm că, dacă $\{x\} = 0$, atunci ecuația este verificată. **2p**

De asemenea, ecuația este verificată în cazul când $[x] = 0$ **2p**

Pentru $\{x\} \neq 0$ ecuația este $\{x\}^5 = (x - [x])(x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4)$, adică $\{x\}^4 = x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4$. Dacă $[x] \neq 0$, atunci membrul drept din ultima ecuație este suma dintre $[x]^4$ și patru termeni pozitivi, deci este mai mare decât 1, iar membrul stâng este mai mic decât 1, ceea ce arată că în acest caz nu există soluții. Așadar, mulțimea soluțiilor este $[0, 1] \cup \mathbb{Z}$ **3p**

Problema 2. Demonstrați că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Soluție. Notăm $S = a + b + c$ **1p**

Membrul stâng este $\frac{a}{S+a} + \frac{b}{S+b} + \frac{c}{S+c} = 3 - S \left(\frac{1}{S+a} + \frac{1}{S+b} + \frac{1}{S+c} \right)$ **2p**

Inegalitatea devine $4S \left(\frac{1}{S+a} + \frac{1}{S+b} + \frac{1}{S+c} \right) \geq 9$ **1p**

Deoarece $4S = (S+a) + (S+b) + (S+c)$ și $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ pentru orice $x, y, z > 0$, inegalitatea este demonstrată. **3p**

Problema 3. Un cerc care trece prin vârfurile B și C ale unui triunghi ABC taie din nou laturile (AB) și (AC) în N , respectiv M . Luăm punctele $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât unghiurile $\angle BAC$ și $\angle PAQ$ să aibă aceeași bisectoare.

a) Arătați că $\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}$.

b) Arătați că mijloacele segmentelor (BM) , (CN) , (PQ) sunt coliniare.

Soluție. a) Din ipoteză reiese $\angle AMP \equiv \angle ABQ$ și $\angle MAP \equiv \angle BAQ$, deci $\triangle APM \sim \triangle AQB$, de unde $\frac{MP}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$; analog $\frac{NP}{CQ} = \frac{AP}{AQ}$ **2p**

Prin împărțire obținem concluzia. **1p**

b) Fie $\frac{MP}{PN} = \frac{BQ}{QC} = k$. Avem $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$. **1p**

Pentru mijlocul S al segmentului (BM) avem $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM})$; analog pentru mijloacele T, U ale segmentelor (CN) , respectiv (PQ) **1p**

Deducem $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AS} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AT}$, de unde concluzia. **2p**

Problema 4. Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant și are proprietatea: a_n divide n^2 , oricare ar fi $n \geq 1$. Arătați că:

– fie există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;

– fie există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.

Soluție. Deoarece șirul este neconstant, există n_0 astfel încât $a_n > 1$ pentru $n \geq n_0$. Astfel, dacă $p > n_0$ este un număr prim, atunci $a_p = p$ sau $a_p = p^2$ **1p**

În cazul când $a_n \leq n$ pentru orice n , luând un număr prim $p > n_0$ obținem $a_p = p$. Rezultă apoi inductiv că $a_n = n$ pentru $n \geq p$: dacă $a_n = n$, atunci $n+1 \geq a_{n+1} \geq n$ și $a_{n+1} \mid (n+1)^2$ implică $a_{n+1} = n+1$. Așadar, în acest caz putem lua $n_1 = p$ **3p**

Rămâne cazul când există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_m > m$. În acest caz, deoarece $m+1 \nmid m^2$ (deoarece $m+1 \mid m^2-1$, $m+1 > 1$ iar m^2 și m^2-1 sunt prime între ele) rezultă că $a_m \geq m+2$, deci $a_{m+1} > m+1$. Continuând inductiv obținem $a_n > n$ pentru orice $n \geq m$. În particular, luând un număr prim $p > m$ obținem $a_p = p^2$. Rezultă apoi inductiv că $a_n = n^2$ pentru $n \geq p$: dacă $a_n = n^2$, atunci $a_{n+1} \geq n^2 > \frac{1}{2}(n+1)^2$ (ultima inegalitate fiind valabilă deoarece $n \geq p \geq 3$) și $a_{n+1} \mid (n+1)^2$ implică $a_{n+1} = (n+1)^2$. Așadar, în acest caz putem lua $n_2 = p$ **3p**