



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a IX-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^5 + \{x\}^5 = x^5.$$

Notă: prin $[x]$ și $\{x\}$ se notează partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Problema 2. Demonstrați că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematică

Problema 3. Un cerc care trece prin vârfurile B și C ale unui triunghi ABC taie din nou laturile (AB) și (AC) în N , respectiv M . Luăm punctele $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât unghiurile $\angle BAC$ și $\angle PAQ$ să aibă aceeași bisectoare.

a) Arătați că

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}.$$

b) Arătați că mijloacele segmentelor (BM) , (CN) , (PQ) sunt coliniare.

Problema 4. Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant și are proprietatea: a_n divide n^2 , oricare ar fi $n \geq 1$. Arătați că una dintre următoarele afirmații este adevărată:

- există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;
- există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.