Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie a şi b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a-\sqrt{ab}$ şi $b-\sqrt{ab}$ sunt raţionale. Arătaţi că numerele a şi b sunt raţionale.

Gazeta Matematică

Problema 2. Piramida $VABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstraţi că planul (VCD) formează unghiuri congruente cu planele (VAC) şi respectiv (BAC) dacă şi numai dacă unghiurile $\sphericalangle VAC$ şi $\sphericalangle BAC$ sunt congruente.

Problema 3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c. Determinaţi cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax+b+c}+\frac{1}{a+bx+c}+\frac{1}{a+b+cx}\geq\frac{n}{a+b+c},$$

pentru orice $x\in[0,1]$.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $AD\perp BC$ şi $AC\perp BD$. Notăm cu E şi F proiecţiile punctului B pe dreptele AD şi AC, respectiv. Fie M mijlocul segmentului AB şi fie N mijlocul segmentului CD. Arătaţi că $MN\perp EF$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.