Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numere naturale impare $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$. Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1}$ este iraţional.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b şi c cu proprietatea că $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătaţi că dacă două dintre numerele a, b şi c sunt egale, atunci cel puţin unul dintre cele trei numere este iraţional.

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) cu proprietatea că $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Se consideră punctele $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ şi $P \in (AC)$ astfel încât $MNPQ$ este dreptunghi. Demonstraţi că dacă centrul dreptunghiului $MNPQ$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $AB = AC = 3AP$.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E pe latura AB. Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F, iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G. Demonstraţi că dreptele BG şi DF sunt perpendiculare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.