

**Olimpiada Națională de Matematică**

**Etapă Finală, Constanța, 3 Aprilie 2012**

**CLASA a X-a**

**Soluții și bareme orientative**

**Problema 1.** Fie mulțimea  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}\}$ . Demonstrați că în planul complex există o infinitate de triunghiuri echilaterale care au toate afixele vârfurilor în mulțimea  $M$ .

**Soluție.** Fie  $z = a + bi$  un număr complex din  $M$ . Atunci  $a \in \mathbb{Q}$  și  $a^2 + b^2 = 1$ . Un triunghi echilateral cu afixele vârfurilor în mulțimea  $M$ , dintre care unul egal cu  $z$ , are celelalte două vârfuri în punctele de afixe

$$z(-1/2 \pm (i\sqrt{3})/2),$$

..... **2 puncte**  
numere având părțile reale egale cu  $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2$ . Cum  $a \in \mathbb{Q}$ , rezultă că  $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2 \in \mathbb{Q}$  dacă și numai dacă  $b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ .

..... **1 punct**  
Fie  $q = b/\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ . Problema revine la a demonstra că există o infinitate de soluții  $(a, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  ale ecuației  $a^2 + 3q^2 = 1$ , i.e. ecuația  $m^2 + 3n^2 = p^2$  admite o infinitate de soluții  $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

..... **1 punct**  
Cum  $3n^2 = (p - m)(p + m)$ , căutăm soluții pentru care  $p - m = 3$  și  $p + m = n^2$ . Avem  $n^2 = 2m + 3$ , deci  $n$  este impar.

..... **1 punct**  
Alegând  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$ , obținem  $m = 2k^2 + 2k - 1$  și  $p = 2k^2 + 2k + 2$ . Atunci  $a = (2k^2 + 2k - 1)/(2k^2 + 2k + 2)$ ,  $b = ((2k + 1)\sqrt{3})/(2k^2 + 2k + 2)$ , iar  $z = a + bi$  are modulul 1 și  $a, b > 0$ , deci triunghiul echilateral cu un vârf în  $z$  este unic determinat. Cum  $k \in \mathbb{N}^*$  este ales arbitrar, rezultă că există o infinitate de triunghiuri cu proprietatea cerută.

..... **2 puncte**

**Problema 2.** Se consideră trei numere complexe  $a, b$  și  $c$ , astfel încât  $a + b + c = 0$  și  $|a| = |b| = |c| = 1$ . Demonstrați că  $3 \leq |z - a| + |z - b| + |z - c| \leq 4$ , oricare ar fi numărul complex  $z$ , cu  $|z| \leq 1$ .

**Soluție.** Considerăm punctele  $A, B, C$  și  $M$  având afixele  $a, b, c$  și respectiv  $z$ . Atunci triunghiul  $ABC$  este echilateral, înscris în cercul de rază 1 centrat în originea  $O$  a planului complex.

..... **1 punct**  
Pentru inegalitatea din stânga, avem succesiv

$$\begin{aligned} \sum |z - a| &= \sum |\bar{a}| |z - a| = \sum |\bar{a}z - \bar{a}a| \geq \\ &\geq \left| \sum (\bar{a}z - 1) \right| = |z(\sum \bar{a}) - 3| = 3. \end{aligned}$$

..... **2 puncte**

Demonstrăm inegalitatea din dreapta. Considerăm o coardă care trece prin  $M$  și fie  $P, Q$  punctele sale de intersecție cu cercul circumscris triunghiului  $ABC$ . Fie  $p$  și  $q$  afixele punctelor  $P$  și  $Q$ . Există  $\alpha \in [0, 1]$  astfel ca  $m = \alpha p + (1 - \alpha)q$ . Prin urmare

$$\sum |z - a| = \sum |\alpha p + (1 - \alpha)q - a| \leq \alpha \sum |p - a| + (1 - \alpha) \sum |q - a|,$$

deci

$$\sum |z - a| \leq \max \left\{ \sum |p - a|, \sum |q - a| \right\}.$$

..... **2 puncte**

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că  $\max \{ \sum |p - a|, \sum |q - a| \} = \sum |p - a|$  și că  $P$  este poziționat pe cerc între  $A$  și  $C$ . Din identitatea lui Ptolemeu obținem  $PA + PC = PB$ , adică  $|p - a| + |p - c| = |p - b|$ . Atunci  $\sum |z - a| \leq \sum |p - a| = 2|p - b| \leq 4$ , ceea ce trebuia demonstrat.

..... **2 puncte**

**Notă.** Egalitatea din membrul stâng se realizează în cazul  $z = 0$ , iar pentru membrul drept dacă  $z \in \{-a, -b, -c\}$ .

**Problema 3.** Fie numerele reale  $a$  și  $b$ , cu  $0 < a < b$ . Demonstrați:

- a)  $2\sqrt{ab} \leq \frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a+b$ , pentru  $x, y, z \in [a, b]$ .
- b)  $\left\{ \frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \mid x, y, z \in [a, b] \right\} = [2\sqrt{ab}, a+b]$ .

**Soluție.** a) Aplicând inegalitatea mediilor obținem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \sqrt[3]{xyz} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{ab}.$$

..... **1 punct**

Din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq \frac{x+y+z}{3} + \frac{ab(1/x + 1/y + 1/z)}{3} = \frac{1}{3}(f(x) + f(y) + f(z)),$$

..... **1 punct**

unde  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(t) = t + \frac{ab}{t}$ . Avem

$$t(a+b-f(t)) = (b-t)(t-a) \geq 0, t \in [a, b],$$

de unde rezultă că  $f(t) \leq a+b$ ,  $t \in [a, b]$ .

..... **1 punct**

Atunci  $f(x) + f(y) + f(z) \leq 3(a+b)$ , de unde rezultă  $\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a+b$ .

..... **1 punct**

b) Conform punctului anterior, este suficient să demonstrăm că intervalul  $[2\sqrt{ab}, a + b]$  este inclus în mulțimea din membrul stâng. Vom arăta că

$$[2\sqrt{ab}, a + b] \subset f([a, b]).$$

Pentru aceasta, fie  $s \in [2\sqrt{ab}, a + b]$ . Ecuația  $f(t) = s$  este echivalentă cu  $t^2 - st + ab = 0$ . Deoarece  $s \geq 2\sqrt{ab}$ , discriminantul  $s^2 - 4ab$  este pozitiv, deci ecuația admite soluții reale,

..... **1 punct**  
care aparțin intervalului  $[a, b]$ .

..... **1 punct**  
Alegând  $x = y = z = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4ab}}{2}$  obținem  $\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} = s$ , de unde rezultă cerința.

..... **1 punct**

**Problema 4.** Fie  $n$  și  $m$  două numere naturale,  $m \geq n \geq 2$ . Determinați numărul funcțiilor injective  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  cu proprietatea că există și este unic un număr  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  pentru care  $f(i) > f(i+1)$ .

**Soluție.** Problema cere determinarea numărului de funcții care sunt strict crescătoare pe mulțimile  $\{1, 2, \dots, i-1, i\}$  și pe  $\{i+1, i+2, \dots, n\}$ , dar care nu sunt strict crescătoare pe mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

..... **1 punct**  
Imaginea unei funcții injective  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  este o mulțime cu exact  $n$  elemente. Pentru o funcție  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  cu proprietatea cerută notăm cu  $A$  imaginea sa și fie  $g$  unica funcție strict crescătoare de la  $A$  la  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Evident,  $g$  este funcție bijectivă.

Rezultă că  $h = g \circ f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  este o funcție bijectivă cu proprietatea din enunț. Într-adevăr, fie  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  pentru care  $f(1) < \dots < f(i)$ ,  $f(i) > f(i+1)$  și  $f(i+1) < \dots < f(n)$ . Cum  $g$  este funcție strict crescătoare, deducem că  $g(f(1)) < \dots < g(f(i))$ ,  $g(f(i)) > g(f(i+1))$  și  $g(f(i+1)) < \dots < g(f(n))$ , adică  $h(1) < \dots < h(i)$ ,  $h(i) > h(i+1)$  și  $h(i+1) < \dots < h(n)$ .

..... **1 punct**  
Vom arăta că funcției  $h$  îi corespunde unic o submulțime  $M$  a mulțimii  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alta decât  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{1, 2\}$ , ...,  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Pentru fiecare  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alegem o submulțime  $M$  a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  având  $i$  elemente. Funcția  $h$  este unic determinată de  $n$ -uplul  $(h(1), h(2), \dots, h(n))$ , care se obține ordonând crescător mai întâi elementele mulțimii  $M$ , iar apoi elementele mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus M$ .

..... **2 puncte**  
Pentru ca  $h$  să nu fie strict crescătoare pe  $\{1, 2, \dots, n\}$ , mulțimea  $M$  cu  $\text{card } M = i$  trebuie să fie diferită de  $\{1, 2, \dots, i\}$ .

..... **1 punct**

Deoarece sunt  $2^n$  submulțimi ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ , iar  $n + 1$  dintre acestea – anume  $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n\}$  – nu convin, rezultă că sunt  $2^n - n - 1$  funcții bijective  $h = g \circ f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  cu proprietatea cerută.

..... **1 punct**

Cum imaginea  $A \subset \{1, 2, \dots, m\}$  cu  $n$  elemente poate fi aleasă în  $C_m^n$  moduri, rezultă că sunt  $C_m^n(2^n - n - 1)$  funcții injective  $f = g^{-1} \circ h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  cu proprietatea din enunț.

..... **1 punct**