



Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Finală, Constanța, 3 aprilie 2012

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât

$$\int_0^n f(x)f(n-x) dx = \int_0^n (f(x))^2 dx,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$. Să se arate că funcția f este periodică.

Problema 2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și f un endomorfism surjectiv al său, astfel încât $[x, f(x)] = 0$ oricare ar fi $x \in R$, unde $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in R$. Să se arate că:

- (a) $[x, f(y)] = [f(x), y]$ și $x[x, y] = f(x)[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in R$;
- (b) Dacă R este corp și f este diferit de identitate, atunci R este comutativ.

Problema 3. Fie \mathcal{C} mulțimea funcțiilor integrabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Definim funcția $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$V(f) = \int_0^1 (f(x))^2 dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Să se determine următoarele două mulțimi:

- (a) $\{V(f_a) \mid 0 \leq a \leq 1\}$, unde $f_a(x) = 0$, dacă $0 \leq x \leq a$, și $f(x) = x$, dacă $a < x \leq 1$;
- (b) $\{V(f) \mid f \in \mathcal{C}\}$.

Problema 4. Fie m și n două numere naturale nenule. Să se determine numărul minim de rădăcini complexe distincte ale polinomului $\prod_{k=1}^m (f+k)$, când f parcurge mulțimea polinoamelor de grad n cu coeficienți complecși.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.