

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă finală, Constanța, 3 aprilie 2012

CLASA a VII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1.

Soluția 1. a) Fie M și N proiecțiile lui P pe AB , respectiv CD . Atunci $PB^2 - PA^2 = MB^2 - MA^2 = NC^2 - ND^2 = PC^2 - PD^2$, de unde $PD = \sqrt{2}$

..... **2 puncte**

b) Cum $\triangle PAB \equiv \triangle PAD$ (LLL), rezultă că $m(\sphericalangle PAB) = 45^\circ$.

..... **2 puncte**

Din teorema lui Pitagora, $PM = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}PB$, de unde $m(\sphericalangle PBM) = 30^\circ$

..... **2 puncte**

$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle APM) + m(\sphericalangle MPB) = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$... **1 punct**

Soluția 2. a) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, segmentul $[PO]$ este mediană în triunghiurile (eventual degenerate) PAC și PBD , de unde $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. Rezultă că $PD = \sqrt{2}$ **2 puncte**

b) Fie Q astfel încât $PB = BQ$, $m(\sphericalangle PBQ) = 90^\circ$, P și Q de o parte și de alta a lui BC . Atunci $\triangle ABP \equiv \triangle CBQ$ (LUL) **2 puncte**

Din teorema lui Pitagora în $\triangle PBQ$, $PQ = 2$, iar din reciproca teoremei lui Pitagora în $\triangle PCQ$ rezultă $m(\sphericalangle PCQ) = 90^\circ$ **1 punct**

Cum $CQ = \frac{1}{2}PQ$, rezultă $m(\sphericalangle CPQ) = 30^\circ$ **1 punct**

$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle CQB) = m(\sphericalangle CQP) + m(\sphericalangle PQB) = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$

..... **1 punct**

Problema 2. Triunghiul ABC este dreptunghic în A . Se consideră punctele $D \in (AC)$ și $E \in (BD)$ astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle CED$. Arătați că $BE = 2 \cdot AD$.

Soluție Construim D' simetricul lui D față de A **1 punct**

Notând $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle CED) = x$, rezultă că $m(\sphericalangle ADB) = 2x$ și $m(\sphericalangle ABD') = m(\sphericalangle ABD) = 90^\circ - 2x$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle CBD') = x + 90^\circ - 2x = 90^\circ - x$ **2 puncte**

În triunghiul BCD' , deoarece $m(\sphericalangle BD'C) = 2x$, rezultă că $m(\sphericalangle BCD') = 90^\circ - x = m(\sphericalangle CBD')$, deci triunghiul $D'BC$ este isoscel și $D'C = D'B = DB$ **2 puncte**

Dar $DC = DE$, de unde $BE = BD - DE = CD' - CD = DD' = 2 \cdot AD$.

..... **2 puncte**

Problema 3. Se consideră numerele naturale nenule (m, n) astfel încât numerele

$$\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} \quad \text{și} \quad \frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$$

să fie întregi.

a) Arătați că $|m - n| \leq 2$.

b) Găsiți toate perechile (m, n) cu proprietatea din ipoteză.

Soluție

a) Cum $(m^2 - 2n) \mid (n^2 + 2m)$ și $n^2 + 2m > 0$, rezultă $m^2 - 2n \leq n^2 + 2m$, adică $(m - 1)^2 \leq (n + 1)^2$, sau $m \leq n + 2$. Analog $n \leq m + 2$. În consecință $|m - n| \leq 2$ **2 puncte**

b) Presupunem $n \geq m$. Atunci $n \in \{m, m + 1, m + 2\}$.

Dacă $n = m$, trebuie ca $\frac{n+2}{n-2} = 1 + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}$, de unde $n \in \{1, 3, 4, 6\}$. Obținem perechile $(n, m) \in \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (6, 6)\}$ **1 punct**

Dacă $n = m + 1$, atunci $\frac{m^2+2n}{n^2-2m} = 1 + \frac{2m+1}{m^2+1}$.

Pentru $m \geq 3$ avem $0 < \frac{2m+1}{m^2+1} < 1$, deci $\frac{2m+1}{m^2+1} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $m = 1$, $\frac{2m+1}{m^2+1} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, iar pentru $m = 2$ ($n = 3$) avem $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} = \frac{13}{-2} \notin \mathbb{Z}$. Așadar în cazul $n = m + 1$ nu avem soluții. **1 punct**

Dacă $n = m + 2$, avem $\frac{m^2+2n}{n^2-2m} = 1 \in \mathbb{Z}$. Trebuie ca $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} = 1 + \frac{8m+8}{m^2-2m-4} \in \mathbb{Z}$.

Dacă $m \geq 12$, atunci $m^2 - 2m - 4 > 8m + 8$. Într-adevăr, $m^2 - 10m - 12 = m(m - 10) - 12 \geq 12 \cdot 2 - 12 > 0$. Rezultă că pentru $m \geq 12$ avem $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} \notin \mathbb{Z}$. Pentru $m \in \{1, 2, \dots, 11\}$ se verifică perechile obținute și se constată că $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} \in \mathbb{Z}$ pentru $(m, n) \in \{(2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$

În concluzie, având în vedere simetria fracțiilor,

$(m, n) \in \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}$.

..... **3 puncte**

Problema 4. Numim *redus* al unui număr natural A cu n cifre ($n \geq 2$) un număr de $n - 1$ cifre obținut prin ștergerea uneia din cifrele lui A . De exemplu, redușii lui 1024 sunt 124, 104 și 120.

Determinați câte numere de șapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural A și un *redus* al lui A .

Soluție.

Să numim *convenabil*, respectiv *neconvenabil*, un număr care se poate, respectiv nu se poate scrie ca suma dintre un număr și un redus al său.

Suma dintre numărul $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$ și redusul său $B = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ este numărul $11B + a_7$, adică un număr de cel puțin 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărțirea cu 11.

Alegând în mod potrivit numărul B și cifra a_7 , rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărțirea cu 11, este convenabil. **1 punct**

Suma dintre numărul $C = \overline{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6}$ și redusul său $D = \overline{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5}$ este numărul $11D + c_6$, adică un număr de cel mult 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărțirea cu 11.

Ca urmare, alegând în mod potrivit numărul D și cifra c_6 , rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărțirea cu 11, este convenabil. **1 punct**

Așadar, numerele *neconvenabile* se află în mulțimea numerelor de 7 cifre care dau restul 10 la împărțirea cu 11. Întrucât suma oricărui număr natural cu orice redus al său, altul decât cel obținut prin ștergerea ultimei cifre, este un număr par, rezultă că numerele de 7 cifre, de forma $22p + 21$, $p \in \mathbb{N}$, sunt *neconvenabile*. **2 puncte**

Rămâne să studiem situația numerelor de 7 cifre, de forma $22p + 10$, $p \in \mathbb{N}$. Vom arăta că aceste numere se pot scrie sub forma

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n} + \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n} = 110 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2}} + 10 \cdot a_{n-1} + 2a_n,$$

unde $n \in \{6, 7\}$.

Numerele de forma $22p + 10$, $p \in \mathbb{N}$, au, în funcție de restul împărțirii lui p la 5, una din formele $110k + 10$, $110k + 32$, $110k + 54$, $110k + 76$, $110k + 98$, $k \in \mathbb{N}$.

Alegând $k = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2}}$ și, de exemplu, $(a_{n-1}, a_n) \in \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)\}$, rezultă că numerele de forma $22p + 10$, $p \in \mathbb{N}$, sunt convenabile. **2 puncte**

Ca urmare, numerele *neconvenabile* de 7 cifre sunt cele de forma $22p + 21$, $p \in \mathbb{N}$. Din $10^6 \leq 22p + 21 \leq 10^7 - 1$, rezultă că $45\,454 \leq p \leq 454\,544$. Cum p ia $454\,544 - 45\,454 + 1 = 409\,091$ valori, rezultă că sunt 409 091 numere *neconvenabile* de 7 cifre. **1 punct**