



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Constanța, 3 aprilie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie P un punct în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $PA = 1$, $PB = \sqrt{2}$ și $PC = \sqrt{3}$.

- a) Determinați lungimea segmentului $[PD]$.
- b) Determinați măsura unghiului $\sphericalangle APB$.

Problema 2. Triunghiul ABC este dreptunghic în A . Se consideră punctele $D \in (AC)$ și $E \in (BD)$ astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle CED$. Arătați că $BE = 2 \cdot AD$.

Problema 3. Se consideră numerele naturale nenule (m, n) astfel încât numerele

$$\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} \quad \text{și} \quad \frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$$

să fie întregi.

- a) Arătați că $|m - n| \leq 2$.
- b) Găsiți toate perechile (m, n) cu proprietatea din ipoteză.

Problema 4. Numim *redus* al unui număr natural A cu n cifre ($n \geq 2$) un număr de $n - 1$ cifre obținut prin ștergerea uneia din cifrele lui A . De exemplu, redușii lui 1024 sunt 124, 104 și 120.

Determinați câte numere de șapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural A și un *redus* al lui A .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.