



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Finală, Constanța, 3 Aprilie 2012

CLASA a X-a

Problema 1. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}\}$. Demonstrați că în planul complex există o infinitate de triunghiuri echilaterale care au toate afixele vârfurilor în mulțimea M .

Problema 2. Se consideră trei numere complexe a , b și c , astfel încât $a + b + c = 0$ și $|a| = |b| = |c| = 1$. Demonstrați că

$$3 \leq |z - a| + |z - b| + |z - c| \leq 4,$$

oricare ar fi numărul complex z , cu $|z| \leq 1$.

Problema 3. Fie numerele reale a și b , cu $0 < a < b$. Demonstrați:

a) $2\sqrt{ab} \leq \frac{x + y + z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a + b$, pentru $x, y, z \in [a, b]$.

b) $\left\{ \frac{x + y + z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \mid x, y, z \in [a, b] \right\} = [2\sqrt{ab}, a + b]$.

Problema 4. Fie n și m două numere naturale, $m \geq n \geq 2$. Determinați numărul funcțiilor injective

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$$

cu proprietatea că există și este unic un număr $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ pentru care $f(i) > f(i + 1)$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.