



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Constanța, 3 aprilie 2012

CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinați numerele reale a, b, c, d astfel încât $ab + c + d = 3$, $bc + d + a = 5$, $cd + a + b = 2$ și $da + b + c = 6$.

Problema 2. În planul xOy se consideră mulțimea de puncte

$$X = \{P(a, b) \mid (a, b) \in \{1, 2, \dots, 10\} \times \{1, 2, \dots, 10\}\}.$$

Determinați numărul de drepte diferite care se obțin unind câte două dintre punctele mulțimii X , astfel încât oricare două drepte nu sunt paralele.

Problema 3. Se consideră triunghiurile ascuțitunghice ACD și BCD , situate în plane diferite. Fie G și H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului BCD , iar G' și H' centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ACD . Știind că dreapta HH' este perpendiculară pe planul (ACD) , arătați că dreapta GG' este perpendiculară pe planul (BCD) .

Problema 4.

Pentru orice mulțimi numerice nevide A și B , notăm $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

a) Determinați cel mai mare număr natural nenul p cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = p$ și $A + B = \{0, 1, 2, \dots, 2012\}$.

b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = n$ și $A + B = \{0, 1, 2, \dots, 2012\}$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.