

Clasa a XII-a — Soluții și barem orientativ

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât

$$\int_0^n f(x)f(n-x) \, dx = \int_0^n (f(x))^2 \, dx,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$. Să se arate că funcția f este periodică.

Soluție. Fie n un număr natural nenul. Cu substituția $y = n - x$, obținem

$$\int_0^n f(n-y)f(y) \, dy = \int_0^n (f(n-y))^2 \, dy.$$

..... **2 puncte**

Prin adunarea acestei relații cu cea din enunț, rezultă

$$\int_0^n (f(x) - f(n-x))^2 \, dx = 0.$$

Din continuitatea lui f deducem că $f(x) = f(n-x)$ pentru orice $x \in [0, n]$.

..... **3 puncte**

Fie $x \geq 0$ și $n \geq x$ un număr natural nenul. Atunci

$$f(x+1) = f(n+1-x-1) = f(n-x) = f(x).$$

..... **2 puncte**

Problema 2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și f un endomorfism surjectiv al său, astfel încât $[x, f(x)] = 0$ oricare ar fi $x \in R$, unde $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in R$. Să se arate că:

- (a) $[x, f(y)] = [f(x), y]$ și $x[x, y] = f(x)[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in R$;
- (b) Dacă R este corp și f este diferit de identitate, atunci R este comutativ.

Soluție. (a) Demonstrăm prima relație:

$$\begin{aligned} 0 &= [x-y, f(x-y)] = [x-y, f(x) - f(y)] \\ &= [x, f(x)] - [x, f(y)] - [y, f(x)] + [y, f(y)] = -[x, f(y)] + [f(x), y]. \end{aligned}$$

..... **2 puncte**

Demonstrația celei de a doua relații face apel la prima. Fie $y = f(z)$, $z \in R$. Atunci

$$\begin{aligned} x[x, y] &= x[x, f(z)] = x[f(x), z] = xf(x)z - xzf(x) = f(x)xz - xzf(x) \\ &= [f(x), xz] = [x, f(xz)] = [x, f(x)y] = xf(x)y - f(x)yx \\ &= f(x)xy - f(x)yx = f(x)[x, y]. \end{aligned}$$

..... **2 puncte**

(b) Arătăm că $R^* = Z(R^*) = \{x : x \in R^*, xy = yx \text{ oricare ar fi } y \in R^*\}$, centrul grupului multiplicativ R^* . Fie $\text{Fix } f = \{x : x \in R^*, f(x) = x\}$. Din a doua egalitate de la punctul (a), rezultă că $R^* \setminus Z(R^*) \subseteq \text{Fix } f$, deci $R^* = Z(R^*) \cup \text{Fix } f$. Întrucât $Z(R^*)$ și $\text{Fix } f$ sunt și subgrupuri ale lui R^* , sau $\text{Fix } f \subseteq Z(R^*)$, caz în care $R^* = Z(R^*)$; sau $Z(R^*) \subseteq \text{Fix } f$, caz în care $R^* = \text{Fix } f$, i.e., f este identitatea — contradicție. Prin urmare, $R^* = Z(R^*)$, i.e., R^* este comutativ.

..... **3 puncte**

Remarci. Un endomorfism cu proprietatea din enunț se numește endomorfism *comutativ*. Un inel *prim* este un inel care are următoarea proprietate: dacă produsul a două ideale este nul, atunci cel puțin unul dintre cele două ideale este nul. Folosind a doua relație de la punctul (a), se poate demonstra că un inel prim care posedă un automorfism comutativ diferit de identitate, este comutativ și integru (fără divizori ai lui zero).

Teorema lui Wedderburn — orice corp finit este comutativ — este un caz particular al rezultatului de la punctul (b): cu excepția cazului trivial al corpului cu p elemente (p prim), orice corp finit de caracteristică p admite un automorfism comutativ diferit de identitate — automorfismul Frobenius, $x \mapsto x^p$.

Problema 3. Fie \mathcal{C} mulțimea funcțiilor integrabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Definim funcția $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$V(f) = \int_0^1 (f(x))^2 dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Să se determine următoarele două mulțimi:

- (a) $\{V(f_a) \mid 0 \leq a \leq 1\}$, unde $f_a(x) = 0$, dacă $0 \leq x \leq a$, și $f(x) = x$, dacă $a < x \leq 1$;

(b) $\{V(f) \mid f \in \mathcal{C}\}$.

Soluție. (a) Mulțimea cerută este intervalul închis $[0, 5(3 - \sqrt{5})/24]$:

$$V(f_a) = \int_a^1 x^2 dx - \left(\int_a^1 x dx \right)^2 = (1 - a^3)/3 - (1 - a^2)^2/4$$

este o funcție polinomială al cărei punct de maxim pe $[0, 1]$ este $(\sqrt{5} - 1)/2$. Concluzia rezultă din monotonia acestei funcții.

..... **3 puncte**

(b) Arătăm că această mulțime este inclusă în mulțimea de la punctul (a). Fie $f \in \mathcal{C}$. Vom demonstra că există a în $[0, 1]$, astfel încât $V(f) \leq V(f_a)$.

..... **1 punct**

Fie

$$a = \left(1 - 2 \int_0^1 f(x) dx \right)^{1/2} \in [0, 1].$$

Atunci

$$\int_0^1 f_a(x) dx = (1 - a^2)/2 = \int_0^1 f(x) dx,$$

deci

$$\begin{aligned} V(f_a) - V(f) &= \int_0^1 ((f_a(x))^2 - (f(x))^2) dx = \int_0^1 (x f_a(x) - (f(x))^2) dx \\ &\geq \int_0^1 x (f_a(x) - f(x)) dx. \end{aligned}$$

..... **1 punct**

Vom arăta că ultima integrală este pozitivă. Considerăm funcția integrabilă $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f_a(x) - f(x)$. Mai întâi demonstrăm că

$$\int_x^1 g(t) dt \geq 0$$

oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Considerăm cele două cazuri posibile: dacă $0 \leq x \leq a$, atunci

$$\begin{aligned} \int_x^1 g(t) dt &= \int_x^1 (f_a(t) - f(t)) dt = \int_0^1 f_a(t) dt - \int_x^1 f(t) dt \\ &\geq \int_0^1 f_a(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = 0; \end{aligned}$$

iar dacă $a \leq x \leq 1$, atunci

$$\int_x^1 g(t) dt = \int_x^1 (f_a(t) - f(t)) dt = \int_x^1 (t - f(t)) dt \geq 0.$$

..... **1 punct**

Aplicând formula a doua de medie, rezultă că există $b \in [0, 1]$ astfel încât

$$\int_0^1 xg(x) dx = \int_b^1 g(x) dx \geq 0,$$

de unde concluzia.

..... **1 punct**

Remarci. (1) Inegalitatea

$$\int_0^1 xg(x) dx \geq 0$$

poate fi demonstrată și fără formula de medie. Fie n un număr natural nenul. Atunci:

$$\begin{aligned} \int_0^1 xg(x) dx &= \left(\int_0^1 xg(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x) dx \right) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x) dx. \end{aligned}$$

Dacă $M = \sup \{|g(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$, atunci

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 xg(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x) dx \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n} \right) |g(x)| dx \\ &\leq \frac{M}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) = \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(\int_{k/n}^1 g(x) dx - \int_{(k+1)/n}^1 g(x) dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^1 g(x) dx - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \int_{k/n}^1 g(x) dx + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{k/n}^1 g(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^1 g(x) dx, \end{aligned}$$

de unde concluzia.

(2) O altă posibilitate este integrarea prin părți pentru integrale Lebesgue:

$$\int_0^1 xg(x) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 g(t) dt \right) dx.$$

Problema 4. Fie m și n două numere naturale nenule. Să se determine numărul minim de rădăcini complexe distincte ale polinomului $\prod_{k=1}^m (f+k)$, când f parcurge mulțimea polinoamelor de grad n cu coeficienți complecși.

Soluție. Minimumul cerut este $n(m-1)+1$ și e atins pentru oricare dintre polinoamele $X^n - k$, $k = 1, \dots, m$.

..... **1 punct**

Vom arăta că numărul de rădăcini distincte ale unui polinom care are forma din enunț este cel puțin $n(m-1)+1$.

Pentru orice $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, și orice $z \in \mathbb{C}$, fie $\text{ord}_z f = \text{ord}_{X-z} f$ cea mai mare putere a lui $X - z$ care îl divide pe f . Mulțimea $Z(f) = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{ord}_z f \neq 0\}$ este exact mulțimea rădăcinilor distincte ale lui f , și

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_z f = \sum_{z \in Z(f)} \text{ord}_z f = \deg f.$$

Prin urmare,

$$|Z(f)| + \sum_{z \in Z(f)} (\text{ord}_z f - 1) = \deg f.$$

Dar

$$\sum_{z \in Z(f)} (\text{ord}_z f - 1) = \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_z (f, f'),$$

unde f' este derivata lui f și (f, f') este cel mai mare divizor comun al lui f și f' . Deci

$$|Z(f)| + \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_z (f, f') = \deg f. \quad (*)$$

..... **2 puncte**

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, și $g = \prod_{k=1}^m (f + a_k)$, unde m este un număr natural nenul, iar a_k sunt numere complexe distincte două câte două. Pentru g relația (*) devine:

$$|Z(g)| + \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_z (g, g') = \deg g = m \deg f.$$

Deoarece $g' = f' \sum_{k=1}^m \prod_{j \neq k} (f + a_j)$, iar polinoamele $f + a_k$ sunt coprime două câte două, dacă $\deg f \geq 1$, atunci (g, g') divide f' , deci

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_z(g, g') \leq \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_z f' = \deg f' = \deg f - 1.$$

Prin urmare, $|Z(g)| \geq (m - 1) \deg f + 1$.

..... **4 puncte**