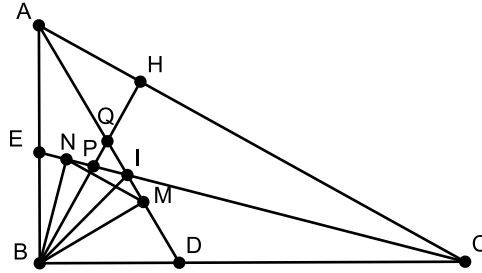


CLASA a IX-A

SOLUȚII ȘI BAREMURI DE CORECTARE

1. Înălțimea  $BH$  dusă pe ipotenuza triunghiului  $ABC$  intersectează bisectoarele  $AD$  și  $CE$  în punctele  $Q$ , respectiv  $P$ . Demonstrați că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor  $[QD]$  și  $[PE]$  este paralelă cu dreapta  $AC$ .



*Soluție.* Dacă  $a, b, c$  sunt laturile, atunci

$$\frac{HA}{HC} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{QA}{QD} = \frac{c^2 b + c}{a^2 c} = \frac{c}{b - c}, \quad (3 \text{ p})$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{b - c}{b} \overrightarrow{BA} + \frac{c}{b} \overrightarrow{BD}, \quad (1 \text{ p})$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{b - c}{2b} \overrightarrow{BA} + \frac{c + b}{2b} \overrightarrow{BD} = \frac{b - c}{2b} \overrightarrow{BA} + \frac{c}{2b} \overrightarrow{BC} \quad (1 \text{ p})$$

și, analog,  $\overrightarrow{BN} = \frac{b - a}{2b} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{2b} \overrightarrow{BA}$ , de unde

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2b} \left( (b - a - c) \overrightarrow{BC} + (a - c - b) \overrightarrow{BA} \right) = \frac{a + c - b}{2b} \overrightarrow{CA},$$

ceea ce dovedește concluzia.

(2 p)

2. Determinați toate funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care au proprietatea: pentru orice interval deschis și mărginit  $I$ , mulțimea  $f(I)$  este un interval deschis, de aceeași lungime cu  $I$ .

*Soluție.* Arătăm că funcțiile care convin sunt cele de forma  $f(x) = x + c$ , precum și cele de forma  $f(x) = -x + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (este evident că acestea verifică cerința).

(1 p)

Pentru aceasta arătăm că

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Într-adevăr, dacă  $a < b$  și  $d = b - a$ , atunci imaginea intervalului  $I = (a - d, b + d)$  este un interval deschis  $J$  de lungime  $3d$ , iar imaginile intervalelor  $(a - d, a)$ ,  $(a, b)$ ,  $(b, b + d)$  sunt trei intervale deschise  $J_1, J_2, J_3$  astfel încât fiecare are lungimea  $d$  și  $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \{f(a)\} \cup \{f(b)\}$ . Aceasta nu este posibil decât dacă  $J_1, J_2, J_3$  sunt disjuncte iar  $f(a)$  și  $f(b)$  sunt punctele care împart  $J$  în trei părți egale, deci  $|f(a) - f(b)| = d$ . **(4 p)**

Din (1) deducem  $|f(x) - f(0)| = |x|$ , deci  $f(x) = c \pm x$ , unde  $c = f(0)$ . Apoi, din  $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$ , în cazul  $f(1) = c + 1$  rezultă  $f(c) = c + x$  pentru orice  $x$ , iar în cazul  $f(1) = c - 1$  rezultă  $f(c) = c - x$  pentru orice  $x$ . **(2 p)**

**3.** Demonstrați că, dacă  $n \geq 2$  este un număr natural și  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt numere reale pozitive, atunci

$$4 \left( \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1} \right) \leq \\ \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

*Soluție.* Dacă notăm  $x_{n+1} = x_1$ , atunci

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3 - x_{i+1}^3}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 - x_{i+1}^2 + \frac{x_i x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}}.$$

**(3 p)**

Pe de altă parte,  $\frac{x_i x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \leq \frac{1}{2} x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)$ ; prin adunarea acestor inegalități pentru  $i = 1, 2, \dots, n$  obținem concluzia. **(4 p)**

**4.** Pe o masă sunt  $k \geq 2$  grămezi având  $n_1, n_2, \dots$ , respectiv  $n_k$  creioane. O mutare constă în alegerea a două grămezi având  $a$ , respectiv  $b$  creioane,  $a \geq b$  și transferarea din prima grămadă în cea de-a doua a  $b$  creioane.

Determinați condiția necesară și suficientă pentru  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , astfel încât să existe o succesiune de mutări prin care toate creioanele sunt transferate în aceeași grămadă.

*Soluție.* Condiția este  $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)/d = 2^m, m \in \mathbb{N}^*$ , unde  $d$  este cel mai mare divizor comun al numerelor  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . **(1 p)**

Într-adevăr, dacă  $a, b$  sunt numere naturale, atunci  $(a - b, 2b) = (a, b)$  sau  $(a - b, 2b) = 2(a, b)$  deci, după orice mutare, cel mai mare divizor comun al numerelor creioanelor din grămezile rămase se păstrează sau se înmulțește cu 2. În final rămâne o grămadă cu  $n_1 + \dots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$  creioane. **(3 p)**

Reciproc, dacă  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$ , atunci demonstrăm prin inducție după  $m$  că există o succesiune de mutări prin care toate creioanele se pot transfera în aceeași grămadă.

În cazul  $m = 1$  avem două grămezi cu  $n_1 = n_2$  creioane, deci după o mutare obținem o singură grămadă.

Presupunem apoi că afirmația este adevărată pentru  $m \leq p$  și orice  $d$ . În situația  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 2^{p+1}d$ , cardinalul mulțimii

$$A = \{i \mid 1 \leq i \leq k, n_i/d \text{ este impar}\}$$

este număr par, deci putem grupa două câte două grămezile cu  $n_i, i \in A$  elemente și, efectuând câte o mutare în fiecare grupă, obținem grămezi cu  $n'_1, \dots, n'_l$  creioane, cu  $n'_1 + \dots + n'_l = 2^q(n'_1, \dots, n'_l)$ ,  $q \leq p$ . Conform ipotezei de inducție, de aici avem o succesiune de mutări care deplasează toate creioanele în aceeași grămadă. (3 p)