



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Finală, Constanța, 3 aprilie 2012

CLASA a IX-a

Problema 1. Înălțimea $[BH]$ dusă pe ipotenuza triunghiului ABC intersectează bisectoarele $[AD]$ și $[CE]$ în punctele Q , respectiv P . Demonstrați că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor $[QD]$ și $[PE]$ este paralelă cu dreapta AC .

Problema 2. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice interval deschis și mărginit I , mulțimea $f(I)$ este un interval deschis, de aceeași lungime cu I .

Problema 3. Demonstrați că, dacă $n \geq 2$ este un număr natural și x_1, x_2, \dots, x_n sunt numere reale pozitive, atunci

$$4 \left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1} \right) \leq \\ \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Problema 4. Pe o masă sunt $k \geq 2$ grămezi având n_1, n_2, \dots , respectiv n_k creioane. O *mutare* constă în alegerea a două grămezi având a , respectiv b creioane, $a \geq b$ și transferarea din prima grămadă în cea de-a doua a b creioane.

Determinați condiția necesară și suficientă pentru n_1, n_2, \dots, n_k , astfel încât să existe o succesiune de mutări prin care toate creioanele sunt transferate în aceeași grămadă.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.