

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă finală, Bistrița, 4 aprilie 2012

CLASA a V-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Trei pirați, Jack, Tom și Bill, jefuiesc o corabie unde găsesc mai mulți săculeți care conțin, împreună, 2012 monede. Jack ia primul săculeț și împarte conținutul acestuia dând fiecăruia, pe rând, câte o monedă, în ordinea Jack, Tom, Bill, Jack, Tom, Bill, ..., până când săculețul se golește. Jack împarte apoi monedele din al doilea săculeț, începând tot cu sine și respectând aceeași ordine. Procedează la fel cu ceilalți săculeți, împărțind monedele după aceeași regulă. La sfârșit, Bill constată că are cu trei monede mai puțin decât Jack. Aflați câte monede a primit fiecare pirat.

Soluție

Dacă Bill are n monede și Jack are $n + 3$ monede, atunci Tom poate avea $n, n + 1, n + 2$ sau $n + 3$ monede. **2 puncte**

Numărul total al monedelor poate fi $3n + 3, 3n + 4, 3n + 5$ sau $3n + 6$. Cum $2012 = M_3 + 2$, singura variantă care convine este $3n + 5$.. **3 puncte**

Obținem că $n = 669$, prin urmare Jack, Tom și Bill au 672, 671 respectiv 669 monede **2 puncte**

Problema 2. Fiecare element al mulțimii $\{2, 3, 4, \dots, 50\}$ se colorează cu câte o culoare, respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeași culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Soluție

Cum 2 divide orice număr par, rezultă că toate numerele pare au o aceeași culoare, să spunem roșu **2 puncte**

Toate numerele impare al căror dublu este în mulțime (anume 3, 5, ..., 25) trebuie să fie tot roșii **1 punct**

Numerele 27, 33, 35, 39, 45, 49 au fiecare câte un divizor roșu, prin urmare vor fi și ele roșii **2 puncte**

Numerele prime mai mari decât 25 (anume 29, 31, 37, 41, 43, 47) pot avea câte o altă culoare. **1 punct**

Numărul maxim de culori care pot fi utilizate este $1 + 6 = 7$. **1 punct**

Problema 3. Doi prieteni, Cristi și Marius, joacă următorul joc: Cristi alege un număr din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \dots, 999\}$, pe care îl înmulțește cu 2, iar Marius adună 22 la rezultat; apoi, Cristi înmulțește noul număr cu 2, iar Marius adună 22 la noul rezultat și așa mai departe. Pierde cel care obține

primul un număr mai mare sau egal cu 1000. Determinați câte posibilități de a alege numărul inițial are Cristi astfel încât să câștige el jocul.

Soluția 1. Cristi câștigă dacă ajunge la un număr mai mare sau egal cu 978 și mai mic decât 1000. Evident, acesta va fi un număr par ... **1 punct**

Deoarece Cristi înmulțește cu 2 și Marius adună 22 la fiecare pas, numerele obținute în timpul jocului sunt pare. Numerele 978, 982, 986, 990, 994 și 998 se obțin prin dublarea numerelor impare 489, 491, 493, 495, 497, 499, numere care nu pot fi obținute în timpul jocului. Aceste numere pot fi însă alese inițial de Cristi și îi asigură câștigarea jocului. **1 punct**

În continuare, C înseamnă rezultat obținut de Cristi, A înseamnă număr care, dacă este ales de Cristi, îi asigură acestuia câștigarea jocului, iar M înseamnă rezultat obținut de Marius. Numerele 980, 984, 988, 992 și 996 se pot obține prin următoarele succesiuni de pași:

$$980(C) \leftarrow 490(A, M) \leftarrow 468(C) \leftarrow 234(A, M) \leftarrow 212(C) \leftarrow 106(A, M) \leftarrow 84(C) \leftarrow 42(A, M) \leftarrow 20(C) \leftarrow 10(A)$$

$$984(C) \leftarrow 492(A, M) \leftarrow 470(C) \leftarrow 235(A)$$

$$988(C) \leftarrow 494(A, M) \leftarrow 472(C) \leftarrow 236(A, M) \leftarrow 214(C) \leftarrow 107(A)$$

$$992(C) \leftarrow 496(A, M) \leftarrow 474(C) \leftarrow 237(A)$$

$$996(C) \leftarrow 498(A, M) \leftarrow 476(C) \leftarrow 238(A, M) \leftarrow 216(C) \leftarrow 108(A, M) \leftarrow 86(C) \leftarrow 43(A)$$

..... **4 puncte**

Deci, Cristi are 22 de posibilități de a alege numărul inițial astfel încât să câștige jocul. **1 punct**

Soluția 2. Dacă Cristi alege numărul a , până la finalul jocului vor fi maxim cinci etape:

$$\underbrace{a \rightarrow 2a \rightarrow 2a + 22}_I \rightarrow \underbrace{4a + 44 \rightarrow 4a + 66}_{II} \rightarrow \underbrace{8a + 132 \rightarrow 8a + 154}_{III} \rightarrow \underbrace{16a + 308 \rightarrow 16a + 330}_{IV} \rightarrow \underbrace{32a + 660 \rightarrow 32a + 682}_V \rightarrow 64a + 1364 > 1000.$$

..... **1 punct**

Cristi câștigă în etapa I dacă $2a < 1000$ și $2a + 22 \geq 1000$, adică $a < 500$ și $a \geq 489$. Rezultă că $a \in \{489, \dots, 499\}$, deci 11 posibilități. ... **1 punct**

Cristi câștigă în etapa II dacă $4a + 44 < 1000$ și $4a + 66 \geq 1000$, adică $a < 239$ și $a \geq \frac{467}{2}$. Rezultă că $a \in \{234, \dots, 238\}$, deci 5 posibilități.

..... **1 punct**

Cristi câștigă în etapa III dacă $8a + 132 < 1000$ și $8a + 154 \geq 1000$, adică $a < \frac{217}{2}$ și $a \geq \frac{423}{4}$. Rezultă că $a \in \{106, 107, 108\}$, deci 3 posibilități.

..... **1 punct**

Cristi câștigă în etapa IV dacă $16a + 308 < 1000$ și $16a + 330 \geq 1000$, adică $a < \frac{173}{4}$ și $a \geq \frac{335}{8}$. Rezultă că $a \in \{42, 43\}$, deci 2 posibilități.

..... **1 punct**

Cristi câștigă în etapa V dacă $32a + 660 < 1000$ și $32a + 682 \geq 1000$, adică $a < \frac{85}{8}$ și $a \geq \frac{159}{16}$. Rezultă că $a = 10$, deci o singură posibilitate.

..... **1 punct**
 În concluzie, Cristi are $11 + 5 + 3 + 2 + 1 = 22$ posibilități de a alege numărul inițial astfel încât să câștige jocul.

..... **1 punct**

Problema 4. Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte cu aceeași sumă a cifrelor.

Demonstrați că mulțimea $M = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ conține o infinitate de numere *olimpice* și o infinitate de numere care nu sunt *olimpice*.

Soluție

Notăm cu $s(a)$ suma cifrelor din scrierea zecimală a numărului natural a .

Dacă n este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$10^n - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{2k \text{ cifre}} = \underbrace{5454 \dots 54}_{2k \text{ cifre}} + \underbrace{4545 \dots 45}_{2k \text{ cifre}}.$$

Cum $s(\underbrace{5454 \dots 54}_{2k \text{ cifre}}) = s(\underbrace{4545 \dots 45}_{2k \text{ cifre}}) = 9k$, rezultă că $10^n - 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, n par, este număr *olimpic*. **3 puncte**

Dacă $a + b = 99 \dots 9$, atunci în adunarea $a + b$ nu există treceri peste ordin, deci $s(a + b) = s(a) + s(b)$ **2 puncte**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ impar. Dacă, prin absurd, $\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}} = a + b$, cu $s(a) = s(b)$, ar rezulta că $9n = s(\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}) = s(a + b) = s(a) + s(b) = 2s(a)$, adică un număr impar este egal cu unul par, contradicție. Ca urmare, numerele de forma $10^n - 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, n impar, nu sunt *olimpice*. **2 puncte**

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
 Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*