Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a V-a

Problema 1. Trei piraţi, Jack, Tom şi Bill, jefuiesc o corabie unde găsesc mai mulţi săculeţi care conţin, împreună, 2012 monede. Jack ia primul săculeţ şi împarte conţinutul acestuia dând fiecăruia, pe rând, câte o monedă, în ordinea Jack, Tom, Bill, Jack, Tom, Bill, ..., până când săculeţul se goleşte. Jack împarte apoi monedele din al doilea săculeţ, începând tot cu sine şi respectând aceeaşi ordine. Procedează la fel cu ceilalţi săculeţi, împărţind monedele după aceeaşi regulă. La sfârşit, Bill constată că are cu trei monede mai puţin decât Jack. Aflaţi câte monede a primit fiecare pirat.

Problema 2. Fiecare element al mulţimii $\{2, 3, 4, ..., 50\}$ se colorează cu câte o culoare, respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeaşi culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Problema 3. Doi prieteni, Cristi şi Marius, joacă următorul joc: Cristi alege un număr din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 999\}$, pe care îl înmulţeşte cu 2, iar Marius adună 22 la rezultat; apoi, Cristi înmulţeşte noul număr cu 2, iar Marius adună 22 la noul rezultat şi aşa mai departe. Pierde cel care obţine primul un număr mai mare sau egal cu 1000. Determinaţi câte posibilităţi de a alege numărul iniţial are Cristi astfel încât să câştige el jocul.

Problema 4. Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte cu aceeaşi sumă a cifrelor.

Demonstraţi că mulţimea $M = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ conţine o infinitate de numere *olimpice* şi o infinitate de numere care nu sunt *olimpice.*

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.