Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a VI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1.
Determinaţi cifrele nenule a, b, c pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{a,b\,(c)}.$$

Soluţie. Dacă $a \geq 3$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<3<\overline{a,b\,(c)}$, contradicţie. .... **1 punct**

Pentru $a=2$, dacă unul dintre numerele b sau c este cel puţin egal cu 3, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}<2<\overline{a,b\,(c)}$, contradicţie, iar dacă $b,c \in \{1,2\}$ nu se obţin soluţii (verificare directă). .... **1 punct**

În cazul $a=1$, obţinem $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{0,b\,(c)}$, de unde $90\,(b+c)=bc\,(9b+c)$ (1)
.... **1 punct**

De aici rezultă că $9 \mid bc\,(9b+c)$.

Dacă 3 nu divide c, atunci $9 \mid b$, deci $b=9$ şi relaţia (1) devine $10\,(9+c)=c\,(81+c)$, care nu are soluţii. .... **2 puncte**

Dacă $3 \mid c$, rezultă $c \in \{3,6,9\}$.

Pentru $c=3$ se obţine soluţia $b=5$, iar pentru $c=6$ şi $c=9$ nu se obţin soluţii.
.... **2 puncte**

Problema 2. Se consideră numărul natural $n \geq 2012$. Pentru orice număr natural nenul $p \leq 2011$, notăm cu A_p mulţimea triunghiurilor care au o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la 2012, o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la p, iar lungimea celei de-a treia laturi este număr natural (se consideră că împărţirile se efectuează cu rest).

a) Arătaţi că, dacă $n<4024$, atunci mulţimea A_p conţine doar triunghiuri isoscele, pentru orice alegere a lui p.

b) Determinaţi valorile numărului natural n pentru care mulţimea A_{1006} are 5 elemente.

Soluţie.

a) Cum $2012 \leq n<4024$, câtul împărţirii lui n la 2012 este egal cu 1. ..... **1 punct**

Dacă $u,v \in \mathbb{N}^*$ sunt lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului, $u \geq v$, atunci $u-v<1$, deci $u=v$. .... **2 puncte**

b) Fie a şi b câtul împărţirii lui n la 2012, respectiv la 1006, şi c lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului; atunci $a<b$. Numărul de elemente al mulţimii A_p este egal cu numărul de moduri în care se poate alege numărul natural c astfel încât a, b, c să poată fi lungimile laturilor unui triunghi.

Din inegalitatea triunghiului, rezultă că $b+a>c>b-a$, deci $\operatorname{card}A_{1006}=(b+a)-(b-a)-1=2a-1$, de unde $a=3$. .... **3 puncte**

Rezultă că n dă câtul 3 la împărţirea cu 2012, deci n are forma $2012 \cdot 3 + r$, unde $r \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq r \leq 2011$. Se obţine $n \in \{6036, 6037, ..., 8047\}$ . . . . **1 punct**

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi X un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $A \in (CX)$. Pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAX}$ se consideră punctul D, iar pe semidreapta $(AB$ se consideră punctul E astfel încât $AE + EC = DA + AC$. Demonstraţi că semidreapta $(CD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$.

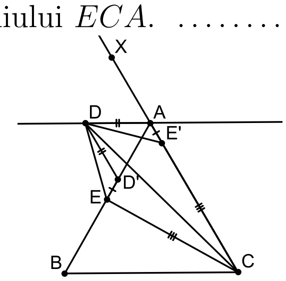
Soluţie. Fie $D' \in AB$ şi $E' \in AC$ astfel încât $AD' = AD$ şi $CE' = CE$.

Deoarece $m(\sphericalangle DAD') = 60°$ şi $AD' = AD$, deducem că triunghiul ADD' este echilateral, deci $AD = DD'$. . . . . **3 puncte**

$AE + EC = AD + AC \Rightarrow AE + E'C = AD' + AC \Rightarrow AE - AD' = AC - E'C \Rightarrow D'E = AE'$. . . . . **1 punct**

Triunghiurile DAE' şi $DD'E$ sunt congruente (LUL). Deci $DE = DE'$. . . . **1 punct**

Triunghiurile DEC şi $DE'C$ sunt congruente (LLL), deci $\sphericalangle(DCE) \equiv \sphericalangle(DCE')$, rezultă CD este bisectoarea unghiului ECA. . . . . **2 puncte**



Problema 4.

Se consideră un număr natural de şapte cifre, în scrierea zecimală a căruia se folosesc cel mult trei cifre distincte nenule. Arătaţi că se pot şterge trei cifre astfel încât numărul de patru cifre rămas şi răsturnatul său au un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

Soluţie. Fie a, b, c cele trei cifre distincte şi n_a , n_b şi n_c numărul de apariţii ale cifrelor a, b, respectiv c, în numărul de 7 cifre considerat; atunci $n_a + n_b + n_c = 7$.

Renotând eventual, putem presupune că $n_a \geq n_b \geq n_c \geq 0$. Cu principiul cutiei, rezultă $n_a \geq 3$. . . . . **1 punct**

Dacă $n_a \geq 4$, putem şterge trei cifre astfel încât să obţinem numărul $\overline{aaaa}$, care este egal cu răsturnatul său. . . . . **1 punct**

Dacă $n_a = 3$, atunci $n_b = 3$ şi $n_c = 1$ sau $n_b = n_c = 2$.

Pentru $n_a = 3$, $n_b = 3$, $n_c = 1$, ştergând o cifră a, o cifră b şi cifra c, numărul rămas are una din formele $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$,$\overline{abba}$ sau răsturnatele acestora. . . . . **2 puncte**

Pentru $n_a = 3$, $n_b = 2$, $n_c = 2$, ştergând o cifră a şi cele două cifre c, numărul rămas are una din formele $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{abba}$ sau răsturnatele acestora. . . . . **2 puncte**

Numărul $\overline{aabb}$ şi răsturnatul său au divizorul comun 11, numărul $\overline{abab}$ şi răsturnatul său au divizorul comun 101, iar $\overline{abba}$ este identic cu răsturnatul său. . . . . **1 punct**