



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Bistrița, 4 aprilie 2012

CLASA a VI-a

Problema 1. Determinați cifrele nenule a, b, c pentru care

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \overline{a, b(c)}.$$

Problema 2. Se consideră numărul natural $n \geq 2012$. Pentru orice număr natural nenul $p \leq 2011$, notăm cu A_p mulțimea triunghiurilor care au o latură de lungime egală cu câtul împărțirii lui n la 2012, o latură de lungime egală cu câtul împărțirii lui n la p , iar lungimea celei de-a treia laturi este număr natural (se consideră că împărțirile se efectuează cu rest).

a) Arătați că, dacă $n < 4024$, atunci pentru orice alegere a lui p , toate elementele din mulțimea A_p sunt triunghiuri isoscele.

b) Determinați valorile numărului natural n pentru care mulțimea A_{1006} are 5 elemente.

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC și X un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $A \in (CX)$. Pe bisectoarea unghiului \widehat{BAX} se consideră punctul D , iar pe semidreapta $(AB$ se consideră punctul E astfel încât $AE + EC = DA + AC$. Demonstrați că semidreapta $(CD$ este bisectoarea unghiului \widehat{ACE} .

Problema 4. Se consideră un număr natural de șapte cifre, în scrierea zecimală a căruia se folosesc cel mult trei cifre distincte nenule. Arătați că se pot șterge trei cifre astfel încât numărul de patru cifre rămas și răsturnatul său au un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*