

ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire
MPSI, session 2013

Durée du test : 4 heures

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Notations : le signe « $:=$ » désigne une égalité de définition. On désigne par $[p, q]$ l'ensemble des entiers compris entre p et q .

Exercice 1 a. Montrer que, si $u \in [0, 1]$,

$$e^u \leq 1 + (e - 1)u.$$

b. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n := \int_0^1 e^{t^n} dt.$$

Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de parties de $[1, 3n]$ contenant exactement deux multiples de 3.

Exercice 3 Une urne U_1 contient 5 boules blanches et 5 boules noires, une urne U_2 contient 2 boules blanches et 8 boules noires. On choisit équiprobablement l'une de ces deux urnes, puis on tire successivement deux boules dans cette urne, équiprobablement et avec remise (c'est-à-dire que l'on remet la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la seconde.)

Après choix d'une urne, puis tirage des deux boules, on obtient deux boules blanches. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi l'urne U_1 ?

Exercice 4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel λ pour que l'équation

$$\cos^4 x + 4 \cos x + \lambda = \sin y$$

admette au moins une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

TSVP

Exercice 5. Pour $x > 0$, on pose $f(x) := \frac{\ln(1+x)}{x}$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Exercice 6 On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1) lorsque

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = 3u_n + 2 + 2^n.$$

a. Déterminer des constantes réelles a et b telles que, si $v_n := a + b2^n$, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie (1).

b. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant (1).

c. Déterminer les suites croissantes $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant (1).

d. Déterminer les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, croissantes à partir d'un certain rang, vérifiant (1). On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions f , à valeurs réelles, définies et continues sur \mathbb{R} , telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad f(uv) = uf(v) + f(u)v.$$

Exercice 8 Soit x, y et z trois nombre rationnels tels que

$$xyz \in \mathbb{Z} ; x + y + z \in \mathbb{Z} ; x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que x, y et z sont dans \mathbb{Z} .

Exercice 9 On considère un triangle non aplati ABC avec $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$. On considère la bissectrice intérieure issue de A , qui coupe le segment $[BC]$ en le point I . Calculer la longueur AI en fonction de a, b et c .

Exercice 10 On appelle **ordre** d'une racine de l'unité $z \in \mathbb{C}$ le plus petit entier $n > 0$ tel que $z^n = 1$.

a. Calculer l'ordre de $e^{\frac{7+11i\pi}{2013}}$.

b. On note z_n la somme des nombres complexes d'ordre n . Déterminer z_3, z_9, z_{27} . Déterminer, si p est un nombre premier et si $n \geq 1$, z_{p^n} .

c. Soit q et r deux nombres premiers entre eux. Montrer que $z_{qr} = z_q z_r$.

d. Calculer z_{2013} .

FIN DE L'ÉPREUVE