



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014
CLASA a IX-a

Problema 1. Să se determine numărul irațional x știind că numerele $x^2 + x$ și $x^3 + 2x^2$ sunt numere întregi.

prelucrare din Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}.$$

Semidreptele (AD) , (BE) și (CF) intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M , N și P . Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate dacă și numai dacă triunghiurile BMC , CNA și APB au ariile egale.

Problema 3. Medianele AD , BE și CF ale triunghiului ABC se intersectează în punctul G . Fie P un punct în interiorul triunghiului, nesituat pe niciuna dintre medianele acestuia. Dreapta care trece prin P și este paralelă cu AD intersectează latura BC în punctul A_1 . În mod analog se definesc punctele B_1 și C_1 . Să se arate că

$$\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F} = \frac{3}{2}\overline{PG}.$$

Problema 4. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietățile:

- a) $f(m+n) - 1$ divide $f(m) + f(n)$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- b) $n^2 - f(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.