



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014**

**CLASA a X-a**

**Problema 1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$|z - |z + 1|| = |z + |z - 1||.$$

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x + \log_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{5^x}{3^x + 4^x}} \right) = 4 + \log_{1/2} \left( 1 + \sqrt{\frac{25^x}{7^x + 24^x}} \right).$$

**Problema 3.** Fie numerele naturale nenule  $p$  și  $n$ , unde  $p \geq 2$ , și fie numărul real  $a$  astfel încât  $1 \leq a < a + n \leq p$ . Să se arate că mulțimea

$$\{ [\log_2 x] + [\log_3 x] + \cdots + [\log_p x] \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq a + n \}$$

are exact  $n + 1$  elemente.

*Notă:*  $[\log_k x]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $\log_k x$ .

**Problema 4.** Să se determine funcțiile  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  cu proprietatea că

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{Q}.$$

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*