



Simularea examenului de bacalaureat național 2015

MATEMATICĂ M_mate-info

Proba E. c)

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÊTEL

(30 pont)

- 5p** 1. Mutassátok ki, hogy a $z = (1 + i)^4 + (1 - i)^4$ egy valós szám.
- 5p** 2. Ha x_1, x_2 az $x^2 - x - 3 = 0$ egyenlet gyökei, mutassátok ki, hogy $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 8$.
- 5p** 3. Oldjátok meg a valós számok halmazában a következő egyenletet: $\ln(x^2 + 1) = \ln(3x - 1)$.
- 5p** 4. Mi annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott háromjegyű szám számjegyeinek a szorzata páros szám legyen?
- 5p** 5. Adott az ABC háromszög, $M \in [BC]$ úgy, hogy $MB = \frac{1}{3}BC$. Mutassátok ki, hogy $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.
- 5p** 6. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Mutassátok ki, hogy $\sin B > \cos C$.

II. TÊTEL

(30 pont)

1. Adottak $M_3(\mathbb{R})$ -ben a következő mátrixok.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy az A rangja 3.
- 5p** b) Számítsátok ki B^n -t, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Mutassátok ki, hogy $A^{2015} = I_3 + 2015 \cdot B + 1007 \cdot 2015 \cdot B^2$.
2. Az \mathbb{R} -ben értelmezzük a $*$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $(\mathbb{R}, *)$ Ábel féle csoport!
- 5p** b) Határozzátok meg az $x \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy $x * x * x = 3\sqrt[3]{3}$.
- 5p** c) Mutassátok ki, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bármely $x \in \mathbb{R}$ -re függvény egy csoportizomorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{R}, *)$ csoportok között.

III. TÊTEL

(30 pont)

1. Adott a következő függvény $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ bármely $x > 0$ esetén.
- 5p** a) Számítsátok ki $f'(x)$, $x > 0$.
- 5p** b) Ha $m \in \mathbb{R}$, határozzátok meg a $\ln x = mx$ egyenlet valós gyökeinek a számát.
- 5p** c) Mutassátok ki, hogy létezik legalább 2015 darab (a, b) valós számpár úgy, hogy $a, b > 0$, $a \neq b$ és $a^b = b^a$.
2. Adottak az $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$, $F(x) = (x - 2) \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvények.
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy F egy primitív függvénye f -nek.
- 5p** b) Számítsátok ki $\int_0^1 (x - 1)(x - 2) \cdot e^{2x} dx$ integrál értékét.
- 5p** c) Ha $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy primitív függvénye f -nek, akkor igazoljátok, hogy $G(x) \geq G(1)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

- Minden tétel kötelező!
- Munkaidő 3 óra.