



**Simularea examenului de bacalaureat național 2015**

**MATEMATICĂ M\_mate-info**

**Proba E. c)**

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Să se arate că numărul  $z = (1 + i)^4 + (1 - i)^4$  este real.
- 5p** 2. Dacă  $x_1, x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 - x - 3 = 0$  să se arate că  $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 8$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\ln(x^2 + 1) = \ln(3x - 1)$ .
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr par.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi,  $M \in [BC]$  cu  $MB = \frac{1}{3}BC$ . Arătați că  $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ .
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Să se arate că  $\sin B > \cos C$ .

**SUBIECTUL II**

**(30 de puncte)**

- 1.** Fie matricele
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ din } M_3(\mathbb{R}).$$
- 5p** a) Arătați că A are rangul 3.
- 5p** b) Calculați  $B^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** c) Să se arate că  $A^{2015} = I_3 + 2015 \cdot B + 1007 \cdot 2015 \cdot B^2$ .
- 2.** Pe  $\mathbb{R}$  se consideră operația  $*$  definită prin  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Arătați că  $(\mathbb{R}, *)$  este grup abelian.
- 5p** b) Să se afle  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x * x * x = 3\sqrt[3]{3}$ .
- 5p** c) Arătați că  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  este un izomorfism de la grupul  $(\mathbb{R}, +)$  la grupul  $(\mathbb{R}, *)$ .

**SUBIECTUL III**

**(30 de puncte)**

- 1.** Fie  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  pentru orice  $x > 0$ .
- 5p** a) Calculați  $f'(x), x > 0$ .
- 5p** b) Dacă  $m \in \mathbb{R}$  aflați numărul rădăcinilor reale ale ecuației  $\ln x = mx$ .
- 5p** c) Arătați că există cel puțin 2015 perechi de numere reale  $(a, b)$  cu  $a, b > 0, a \neq b$  și  $a^b = b^a$ .
- 2.** Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin  $f(x) = (x - 1) \cdot e^x, F(x) = (x - 2) \cdot e^x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Arătați că F este o primitivă a lui f.
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 (x - 1)(x - 2) \cdot e^{2x} dx$ .
- 5p** c) Dacă  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a lui f, arătați că  $G(x) \geq G(1)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .