Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VII-a

1.

(i) Să se arate că $\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

(ii) Să se compare numerele *3A* și *B*, unde $A=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{97}}$ și

$B=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{98}}$.

2.

(i) Dacă $x\in\mathbb{N}$ și *3* nu divide pe x, arătați că restul împărțirii lui x^2 la *3* este egal cu *1*.

(ii) Dacă numerele $a,b,c\in\mathbb{N}$ nu sunt divizibile cu *3*, demonstrați că numărul $u=\sqrt{a^{2014}+b^{2016}+c^{2018}+2}$ este irațional.

GM 2014

3. Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

4. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$ şi M mijlocul lui $[AC]$, iar $N\in AB, B\in(AN)$ astfel încât $BN=AM$. Dacă $\{O\}=MN\cap BC$, să se arate că:

(i) Punctul *O* este mijlocul lui $[MN]$.

(ii) $OC=3\cdot OB$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.