Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1.

(i) Să se arate că pentru orice $a,b,c \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea
$4(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$.

(ii) Dacă $u,v,t \in \mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte pare, arătați că $u+v+t$ este suma a patru pătrate perfecte.

2.

(i) Dacă $t \in \mathbb{R}^*$ și $t-\frac{3}{t}=2$, să se arate că $t \in \{-1,3\}$.

(ii) Numerele reale a și b verifică egalitatea $a^2 \cdot b^{-2} - 3a^{-2} \cdot b^2 = 2$. Să se arate că a și b nu pot fi simultan raționale.

GM 2014

3. Într-un paralelipiped dreptunghic suma tuturor muchiilor este 76 cm, iar lungimea diagonalei este 13 cm. Calculaţi $(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(a+b-c)\cdot(-a+b+c)+(a-b+c)\cdot(-a+b+c)$, unde a,b și c sunt dimensiunile paralelipipedului.

SGM 2015

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu muchiile opuse perpendiculare. Fie $AE \perp BC$, $E \in BC$, $AF \perp CD$, $F \in CD$. Fie $BF \cap DE = \{R\}$ şi $CR \cap BD = \{J\}$.

(i) Demonstraţi că $DE \perp BC$.

(ii) Demonstraţi că $AJ \perp BD$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.