Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a IX-a

1.

(i) Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=x-1,\ x\in\mathbb{R}$, unde pentru $a\in\mathbb{R}$, $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

(ii) Să se determine o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_n\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $6/7^n+a_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2.

(i) Arătați că $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]\quad\forall n\in\mathbb{N}.$

(ii) Demonstrați că $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, unde pentru $a\in\mathbb{R}$, $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

3.

(i) Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Să se arate că $4(a+c)(b+d)\leq(a+b+c+d)^2$.

(ii) Numerele reale pozitive x,y,z,t au suma egală cu 4. Să se arate că $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{t}+t\sqrt{x}\leq4$.

GM 2014

4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Notăm cu H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC,BCD,CDA, respectiv DAB și cu M,N mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$.

(i) Arătați că segmentele $[DH_1],[AH_2],[BH_3],[CH_4]$ au același mijloc P.

(ii) Arătați că punctele O,P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.