INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
HUNEDOARA

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil servicii, tehnologic, ştiinţe ale naturii
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a X-a

1. a) Să se raţionalizeze $\dfrac{4}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$.

b) Demonstrați că numărul $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\in\mathbb{Q}$.

2. a) Să se arate că expresia $E=\dfrac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+...+\dfrac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}-\dfrac{n-1}{n}\log_2^2 x$ este independentă de x.

b) Fie $a,b,c\in(0,+\infty)$ subunitare sau supraunitare . Să se demonstreze că :

$$\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

3. a) Să se simplifice fracţia $\dfrac{X^2+1}{X^2-iX+2}$.

b) Dacă $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=r$, atunci numărul $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ este real dacă $r=1$ sau $z_1z_2=r^2$.

4. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc relația $OG^2=R^2-\dfrac{1}{9}(AB^2+BC^2+AC^2)$, unde G este centrul de greutate și R raza cercului circumscris triunghiului. (Relația lui Euler)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.