INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil servicii , tehnologic, ştiinţe ale naturii
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a XII-a - barem de corectare

1.a)	Se determină elementul neutru $e\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{Z}$. $3xe+4x+4e+4=x \Leftrightarrow (3e+4)x+4e+4=x$, de unde $e=-1\in\mathbb{Z}$. Elementele simetrizabile sunt $x\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că există $x'\in\mathbb{Z}$ așa încât $x\circ x'=x'\circ x=-1 \Leftrightarrow 3xx'+4x+4x'+4=-1$, $(3x+4)x'+4x+4=-1 \Leftrightarrow x'=\dfrac{-4x-5}{3x+4}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-1\in\mathbb{Z}$. Un element.	2p 1p 1p
1.b)	Se arată că $x\circ y=3\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(y+\frac{4}{3}\right)-\frac{4}{3}$ Se arată că $\underbrace{x\circ x\circ...\circ x}_{n\ termeni}=3^{n-1}\left(x+\frac{4}{3}\right)^n-\frac{4}{3}$ $\underbrace{x\circ x\circ...\circ x}_{2015\ termeni}=-1 \Leftrightarrow 3^{2014}\left(x+\frac{4}{3}\right)^{2015}-\frac{4}{3}=-1$, de unde $x=-1\in\mathbb{Z}$.	1p 1p 1p
2.a)	Se arată că $\forall A(a),\ A(b)\in G \Rightarrow A(a)\cdot A(b)=A(a+b)\in G$	2p
2.b)	Din a) avem $\left(A(a)\right)^2=A(2a)$ și $\left(A(a)\right)^n=A(na),\ n\in\mathbb{N}$, inducție matematică Se află $A(2)^{2015}=A(2015\cdot 2)=\begin{pmatrix}1&0&4030\\-4030&1&-2015\cdot 4030\\0&0&1\end{pmatrix}$	1p 1p
2.c)	Bijectivitatea funcției $f:G\to\mathbb{R},\ f(A(a))=a,\ a\in\mathbb{R}$ $f(A(a)\cdot A(b))=f(A(a+b))=a+b=f(A(a))+f(A(b))$	2p 1p
3.a)	Dacă F primitivă a unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, atunci F este derivabilă și $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Dacă F este derivabilă, atunci F este continuă. Din continuitatea în $x_0=1$, adică $l_s(1)=l_d(1)=f(1)$ se obține $a+b=1$. Din derivabilitatea în $x_0=1$, adică $f'_s(1)=f'_d(1)$ se obține $a=0$ și $b=1$.	1p 1p 1p
3.b)	$I_1+I_2=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C$	1p 1p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

	$-I_1+I_2=\int\frac{-\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\cos x+\sin x)'}{\sin x+\cos x}dx=\ln\lvert\sin x+\cos x\rvert+C$ Din cele două egalități se obțin primitivele $F_1=\frac{x}{2}-\ln\sqrt{\sin x+\cos x}+C$ și $F_2=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{\sin x+\cos x}+C$.	2p
4.a)	$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2}[\ln x]\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-1)\,dx+\int_{e}^{e^2}1\,dx=$ $-x\Big\vert_{\frac{1}{e}}^{1}+x\Big\vert_{e}^{e^2}=-1+\frac{1}{e}+e^2-e=\frac{e^3-e^2-e+1}{e}$.	2p 1p
4.b)	Se alege $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$. Avem $f'(x)=2x(e^{x^2}-e^{1-x^2})$ Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x=0$, care este punct de maxim (din tabelul de monotonie) și $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, care este punct de minim (din tabelul de monotonie) Deci, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 2\sqrt{e}\le f(x)\le 1+e,\ \forall x\in[0,1]$. Integrând rezultă $2\sqrt{e}\le\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx\le 1+e$.	1p 1p 1p 1p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.