Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puţin egale cu a şi cel mult egale cu b.

Soluţie

Conform relaţiei din enunţ, avem $\overline{ab} = a + (a+1) + ... + b$ şi, cum $a + (a+1) + ... + b \leq 1 + 2 + ... + 9 = 45$, rezultă $a \leq 4$ **3p**

Pentru $a = 4$, rezultă $\overline{ab} \geq 45 = 1 + 2 + ... + 9$, deci ar trebui ca $a = 1$ (şi $b = 9$), nu convine **1p**

Dacă $a = 3$ obţinem $3 + 4 + ... + (b-1) + b = \overline{3b} = 30 + b$. Scăzând b şi adunând $1 + 2$ în ambii membri, rezultă $1 + 2 + ... + (b-1) = 32$, de unde $(b-1) \cdot b = 64$, egalitate care nu se realizează pentru nicio valoare $b \in \{4, 5, ..., 9\}$ **1p**

Dacă $a = 2$, atunci $2 + 3 + ... + (b-1) + b = \overline{2b} = 20 + b$. Scăzând b şi adunând 1 în ambii membri, rezultă $1 + 2 + ... + (b-1) = 21$, de unde $(b-1) \cdot b = 42$.

Cum $6 \cdot 7 = 42$, egalitatea are loc pentru $b = 7$, deci un număr care satisface condiţia din enunţ este $\overline{ab} = 27$ **1p**

Pentru $a = 1$ obţinem $1 + 2 + ... + (b-1) + b = \overline{1b} = 10 + b$, de unde $1 + 2 + ... + (b-1) = 10$ sau $(b-1) \cdot b = 20$.

Egalitatea precedentă se verifică pentru $b = 5$, deci şi $\overline{ab} = 15$ satisface condiţia din enunţ **1p**

Problema 2. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Ştiind că fiecare elev a rezolvat cel puţin o problemă şi că numărul de soluţii corecte ale tuturor concurenţilor este 100, arătaţi că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.

Soluţie

Fie a, b, c numărul elevilor care au rezolvat corect exact una, două, respectiv trei probleme.
Atunci $a + b + c = 50$ şi $a + 2b + 3c = 100$ **2p**
Rezultă $b + 2c = 50$ **2p**
Atunci $2c \leq 50$, deci $c \leq 25$ **3p**

Problema 3. Mulţimea numerelor naturale nenule se împarte în submulţimi astfel:

$$\{1, 2\} \ , \ \{3, 4, 5\} \ , \ \{6, 7, 8, 9\} \ , \ ... \ .$$

a) Aflaţi cel mai mic element din cea de-a 100-a submulţime.
b) Este 2015 cel mai mare element al unei astfel de submulţimi?

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Primele 99 de submulţimi conţin $2 + 3 + ... + 100 = 5049$ de elemente **2p**

În primele 99 de submulţimi sunt scrise numerele de la 1 la 5049, deci cel mai mic element al celei de-a 100-a submulţimi este 5050 .... **1p**

b) 2015 este cel mai mare element al celei de-a n -a submulţimi dacă $2 + 3 + ... + (n + 1) = 2015$ .. **1p**

Adunând 1 în ambii membri rezultă $(n + 1)(n + 2) = 2 \cdot 2016 = 4032$ **2p**

Cum $63 \cdot 64 = 4032$, rezultă că 2015 este cel mai mare element al celei de-a 62-a submulţimi **1p**

Problema 4. a) Arătaţi că ultimele trei cifre ale numărului 1038^2 sunt egale cu 4.
b) Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte ale căror ultime trei cifre sunt egale cu 4.
c) Demonstraţi că nu există pătrate perfecte care să aibă ultimele patru cifre egale cu 4.

Soluţie

a) $1038^2 = 1077\,444$ **1p**

b) Ridicând la pătrat un număr ale cărui ultime trei cifre sunt 038 se obţine un număr care se termină cu trei cifre de 4, după cum se vede din înmulţirea de mai jos **1p**

$$\begin{array}{cccccc}
... & ... & ... & 0 & 3 & 8 \quad \times \\
... & ... & ... & 0 & 3 & 8 \\
\hline
... & ... & ... & 3 & 0 & 4 \\
... & ... & ... & 1 & 4 & \\
\hline
... & ... & ... & 4 & 4 & 4
\end{array}$$

Sunt o infinitate de numere care se termină în 038, deci sunt o infinitate de pătrate perfecte terminate cu trei cifre de 4 .... **1p**

c) Fie a un număr natural al cărui pătrat se termină în patru cifre de 4; atunci a este par, $a = 2b$. În plus, a^2 are forma $10000k + 4444$, $k \in \mathbb{N}$, deci $4b^2 = a^2 = 4(2500k + 1111)$, de unde rezultă că ultimele două cifre ale lui b^2 sunt egale cu 1 .... **1p**

Ultima cifră a lui b este 1 sau 9 .... **1p**

Analizând înmulţirile

$$\begin{array}{ccccc}
... & ... & ... & n & 1 \quad \times \\
... & ... & ... & n & 1 \\
\hline
... & ... & ... & n & 1 \\
... & ... & ... & n & \\
\hline
... & ... & ... & u & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
... & ... & ... & m & 9 \quad \times \\
... & ... & ... & m & 9 \\
\hline
... & ... & ... & p & 1 \\
... & ... & ... & p & \\
\hline
... & ... & ... & v & 1
\end{array}$$

rezultă că u este ultima cifră a lui $2n$, iar v este ultima cifră a lui $2p$, deci sunt cifre pare **1p**

Aşadar, penultima cifră a lui b^2 este pară, deci nu poate fi egală cu 1. Ca urmare, nu există pătrate perfect terminate în patru cifre de 4 .... **1p**