



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a**

**Problema 1.** Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 și 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătați că:

- indiferent câți pași s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;
- este posibil ca, după mai mulți pași, pe tablă să fie scris numărul 2015.

*Gazeta Matematică*

**Soluție**

a) Orice număr care poate fi scris pe tablă este de forma  $11a + 13b$ , unde  $a, b \in \mathbb{N}^*$  ..... **1p**

Dacă ar exista  $a, b \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $86 = 11a + 13b$ , atunci  $b \leq 6$  ..... **1p**

Atunci  $13b \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$ , deci  $11a = 86 - 13b \in \{73, 60, 47, 34, 21, 8\}$  ..... **1p**

Niciunul dintre aceste numere nu se divide cu 11, deci 86 nu se poate scrie pe tablă ..... **1p**

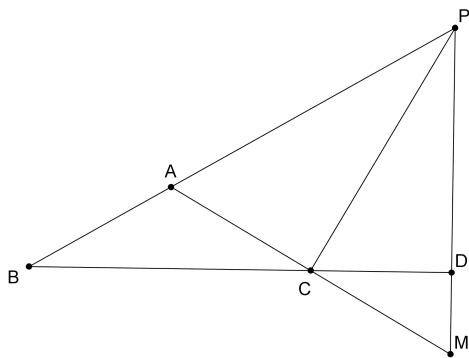
b)  $2015 = 11 \cdot 182 + 13$  ..... **1p**

Putem obține numărul 2015 prin 182 de pași astfel:

$13 + 11 = 24 \xrightarrow{+11} 13 + 2 \cdot 11 = 35 \xrightarrow{+11} 13 + 3 \cdot 11 = 46 \xrightarrow{+11} \dots \xrightarrow{+11} 13 + 182 \cdot 11 = 2015$  .. **2p**

**Problema 2.** Fie triunghiul  $ABC$  obtuzunghic cu  $AB = AC$ . Notăm cu  $M$  simetricul punctului  $A$  față de punctul  $C$  și cu  $P$  intersecția dreptei  $AB$  cu mediatoarea segmentului  $[AM]$ . Știind că dreapta  $PM$  este perpendiculară pe  $BC$ , arătați că triunghiul  $APM$  este echilateral.

**Soluție**



Fie  $\{D\} = BC \cap PM$ . Notăm  $m(\sphericalangle ABC) = x$ . Atunci  $m(\sphericalangle MCD) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = x$ , de unde  $m(\sphericalangle PMC) = 90^\circ - x$  ..... **2p**

Cum  $PC$  este mediatoarea segmentului  $[AM]$ , triunghiul  $PAM$  este isoscel, deci  $\sphericalangle PMC \equiv \sphericalangle PAC$  ..... **2p**

Dar  $m(\sphericalangle PAC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = 2x$ .

Rezultă  $90^\circ - x = 2x$ , de unde  $x = 30^\circ$  ..... **2p**  
 Atunci  $m(\sphericalangle PMC) = m(\sphericalangle PAC) = 60^\circ$ , deci triunghiul  $APM$  este echilateral..... **1p**

**Problema 3.** Determinați pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

**Soluție**

Fie  $\overline{aabcd}$  un pătrat perfect cu  $a \neq 0, d \neq 0$ , astfel încât  $\overline{dcbaa}$  este pătrat perfect.

Deoarece  $\overline{dcbaa}$  este pătrat perfect, rezultă  $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$ ..... **1p**

Numerele de forma  $\overline{dcb55}$  sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 25, deci nu pot fi pătrate perfecte ..... **1p**

Numerele de forma  $\overline{dcb66}$  sunt divizibile cu 2 și nu sunt divizibile cu 4, deci nu pot fi pătrate perfecte ..... **1p**

Numerele de forma  $\overline{dcb11}$  sau  $\overline{dcb99}$  nu pot fi pătrate perfecte deoarece dau restul 3 la împărțirea cu 4 ..... **2p**

Studiem cazul  $a = 4$ . Întrucât  $209^2 < 44000$  și  $213^2 > 45000$ , rezultă că  $\overline{aabcd} \in \{210^2, 211^2, 212^2\}$ .

Cum  $210^2 = 44100$  nu are răsturnatul de 5 cifre,  $211^2 = 44521$  și  $12544 = 112^2$ ,  $212^2 = 44944$ , numerele căutate sunt 44521 și 44944 ..... **2p**

**Problema 4.** Determinați numerele naturale nenule  $A$  și  $B$ , care au același număr de cifre, știind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde  $\overline{AB}$  este numărul obținut prin scrierea cifrelor lui  $B$  după cifrele lui  $A$ .

**Soluție** Fie  $n$  numărul de cifre ale lui  $A$  și  $B$ . Din relația din enunț avem  $(2A - 1)B = 10^n A$ , de unde  $2A - 1 \mid 10^n A$  ..... **1p**

Cum  $(2A - 1, A) = 1$  și  $(2, 2A - 1) = 1$ , rezultă  $2A - 1 \mid 5^n$ , deci  $2A - 1 \leq 5^n$  ..... **2p**

Deoarece  $A$  are  $n$  cifre, rezultă  $A \geq 10^{n-1}$ , deci  $2 \cdot 10^{n-1} - 1 \leq 2A - 1 \leq 5^n$ . Obținem

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1} \leq 5 \cdot 5^{n-1} + 1 \leq 6 \cdot 5^{n-1},$$

deci  $2^n \leq 6$ , de unde  $n \in \{1, 2\}$  ..... **2p**

Pentru  $n = 1$ , din  $2A - 1 \mid 5$ , rezultă  $2A - 1 \in \{1, 5\}$ , deci  $A \in \{1, 3\}$ . Dacă  $A = 1$ , avem  $B = 10$ , care nu convine, deoarece  $B$  are o cifră. Dacă  $A = 3$ , avem  $B = 6$  ..... **1p**

Pentru  $n = 2$ , din  $2A - 1 \mid 25$ , rezultă  $2A - 1 \in \{1, 5, 25\}$ , deci  $A \in \{1, 3, 13\}$ ; dar  $A$  are două cifre, deci  $A = 13$  și  $25B = 1300$ , deci  $B = 52$ . ..... **1p**