Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

# Olimpiada Naţională de Matematică
# Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

## CLASA a XII-a

**Problema 1. (a)** Rezolvaţi ecuaţia $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_7$.

**(b)** Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$, pentru care ecuaţia $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_n$, are soluţie unică.

Gazeta Matematică

**Soluţie. (a)** Cum 4 şi 7 sunt coprime, iar $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ este corp, ecuaţia dată este echivalentă cu $\hat{4}x^2 - \hat{4}x + \hat{1} = \hat{0}$, adică, $(\hat{2}x - \hat{1})^2 = \hat{0}$, deci $\hat{2}x = \hat{1}$, de unde $x = \hat{4}$. .......... **2 puncte**

**(b)** Fie $n \geq 2$ un număr natural pentru care ecuaţia dată are soluţie unică şi fie $a \in \mathbb{Z}_n$ soluţia respectivă. Atunci $(\hat{1} - a)^2 - (\hat{1} - a) + \hat{2} = a^2 - a + \hat{2} = \hat{0}$, deci $\hat{1} - a$ este soluţie a ecuaţiei date. .......... **3 puncte**

Prin urmare, $a = \hat{1} - a$, deci $\hat{2}a = \hat{1}$. În particular, $\hat{2}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_n$ şi $a = \hat{2}^{-1}$. Rezultă că $\hat{2}^{-2} - \hat{2}^{-1} + \hat{2} = \hat{0}$, de unde $\hat{1} - \hat{2} + \hat{8} = \hat{0}$, i.e., $\hat{7} = \hat{0}$. Prin urmare, $n$ este un divizor al lui 7, deci $n = 7$. .......... **2 puncte**

**Problema 2. (a)** Calculaţi

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x.$$

**(b)** Calculaţi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x.$$

**Soluţie. (a)** Făcând substituţia $t = \pi x^2$, integrala devine

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

.......... **2 puncte**

**(b)** Fie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x^2)$, şi $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( kF\left(\frac{k+1}{n}\right) - kF\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( (k+1)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - kF\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( nF(1) - \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right) \right) = F(1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3 puncte**

Limita cerută este

$$F(1) - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xF'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

**Problema 3.** Determinaţi funcţiile continue şi crescătoare $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

oricare ar fi $x, y \in [0,\infty)$.

**Soluţie.** Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $\int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$, de unde $\int_0^y f(t+x)\,\mathrm{d}t \le \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$, oricare ar fi $x \ge 0$ şi $y \ge 0$. . . . . **2 puncte**

Cum $f(t+x) \ge f(t)$, oricare ar fi $t \in [0,y]$ şi oricare ar fi $x \ge 0$, rezultă că $\int_0^y f(t+x)\,\mathrm{d}t \ge \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$, deci $\int_0^y f(t+x)\,\mathrm{d}t = \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$, oricare ar fi $x \ge 0$ şi $y \ge 0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

Din continuitatea lui $f$ deducem că $f(x+y) = f(y)$, oricare ar fi $x \ge 0$ şi oricare ar fi $y \ge 0$. În particular, $f(x) = f(0)$, oricare ar fi $x \ge 0$, deci $f$ este constantă.
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

Evident, orice funcţie constantă verifică condiţiile din enunţ. . . . . . . . . **1 punct**

**Problema 4.** Fie $m$ şi $n$ două numere naturale, $n \ge 2$, fie $A$ un inel care are exact $n$ elemente şi fie $a$ un element al lui $A$, astfel încât $1 - a^k$ este inversabil, oricare ar fi $k \in \{m+1, m+2, \ldots, m+n-1\}$. Arătaţi că $a$ este nilpotent (i.e., există un număr natural nenul $p$, astfel încât $a^p = 0$).

**Soluţie.** Fie $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Există $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, astfel încât $m + p$ este divizibil cu $k$, deci $m + p = k\ell$. Cum $1 - a^{m+p} = (1 - a^k)(1 + a^k + \cdots + a^{k(\ell-1)})$ şi $1 - a^{m+p} \in U(A)$, rezultă că $1 - a^k \in U(A)$. . . . . . . . **2 puncte**

Din $1 - a^k = (1-a)(1 + a + \cdots + a^{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, cu convenţia $a^0 = 1$, rezultă că $b_k = 1 + a + \cdots + a^{k-1} \in U(A)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. . . . . . **2 puncte**

Dacă $b_k$-urile ar fi distincte două câte două, atunci $A$ ar fi corp, deci $a^{n-1} = 1$ şi $0 = 1 - a^{n-1} \in U(A)$ — contradicţie. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1 punct**

Prin urmare, există $1 \le p < q \le n-1$, astfel încât $b_p = b_q$. Atunci $0 = b_q - b_p = a^p b_{q-p}$. Cum $b_{q-p} \in U(A)$, rezultă că $a^p = 0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**