



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015
CLASA a X-a
Soluții și barem de notare

Problema 1. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq \frac{n-1}{2n+2}.$$

..... *Gazeta Matematică*

Soluție. Demonstrăm inegalitatea prin inducție. În cazul $n = 2$ avem egalitate (1 p)

Să observăm că, la pasul de inducție, în trecerea de la $n - 1$ la n , membrul drept crește cu

$$\frac{n-1}{2n+2} - \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

deci e suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geq \frac{1}{n(n+1)},$$

..... (2p)

ceea ce rezultă imediat prin înmulțirea inegalităților

$$k(2n-k+1) \leq n(n+1),$$

pentru $k = 1, 2, \dots, n$ (4p)

Problema 2. Să se determine numerele întregi x, y , pentru care

$$5^x - \log_2(y+3) = 3^y \quad \text{și} \quad 5^y - \log_2(x+3) = 3^x.$$

Soluție. Scăzând egalitățile, se obține

$$5^x + 3^x + \log_2(x+3) = 5^y + 3^y + \log_2(y+3).$$

..... (1p)

Cum funcția $f(t) = 5^t + 3^t + \log_2(t+3)$ este strict crescătoare, rezultă $x = y$ (2p)

Pentru rezolvarea în \mathbb{Z} a ecuației

$$5^x = 3^x + \log_2(x+3),$$

se observă că $x \in \{-2, -1, 0\}$ nu verifică, iar $x = 1$ este soluție. (1p)

Pentru $x \geq 2$, se arată că

$$5^x \geq 3^x + 4^x,$$

folosind monotonia funcției $g(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$, (1p)

iar apoi se demonstrează prin inducție matematică inegalitatea

$$4^x > \log_2(x+3).$$

..... (2p)

Problema 3. Să se determine numerele complexe z pentru care are loc relația

$$|z| + |z - 5i| = |z - 2i| + |z - 3i|.$$

Soluție. Avem

$$|z - 2i| = \left| \frac{2}{5}(z - 5i) + \frac{3}{5}z \right| \leq \frac{2}{5}|z - 5i| + \frac{3}{5}|z|.$$

..... (3p)

Analog

$$|z - 3i| = \left| \frac{3}{5}(z - 5i) + \frac{2}{5}z \right| \leq \frac{3}{5}|z - 5i| + \frac{2}{5}|z|,$$

de unde

$$|z| + |z - 5i| \geq |z - 2i| + |z - 3i|.$$

..... (1p)

Egalitatea are loc atunci când există $\lambda \geq 0$ astfel ca $z - 5i = \lambda z$, de unde deducem că $z = ai$, cu $a \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$. (3p)

Problema 4. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție neconstantă care are proprietatea

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)},$$

pentru orice $x, y > 0$. Să se arate că

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ și } f(x+y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y > 0$.

Soluție. Fie $a > 0$ astfel ca $f(a) \neq 1$. Avem, pentru x, y arbitrari,

$$f(a^{xy}) = f(a)^{f(xy)},$$

dar

$$f(a^{xy}) = f((a^x)^y) = f(a^x)^{f(y)} = \left(f(a)^{f(x)}\right)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)},$$

de unde $f(xy) = f(x)f(y)$ (3p)

Apoi

$$f(a^{x+y}) = f(a)^{f(x+y)},$$

dar

$$f(a^{x+y}) = f(a^x a^y) = f(a^x)f(a^y) = f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)},$$

deci $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (4p)

Observație. Se poate arăta că singura funcție neconstantă care verifică condiția din enunț este identitatea.